TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA

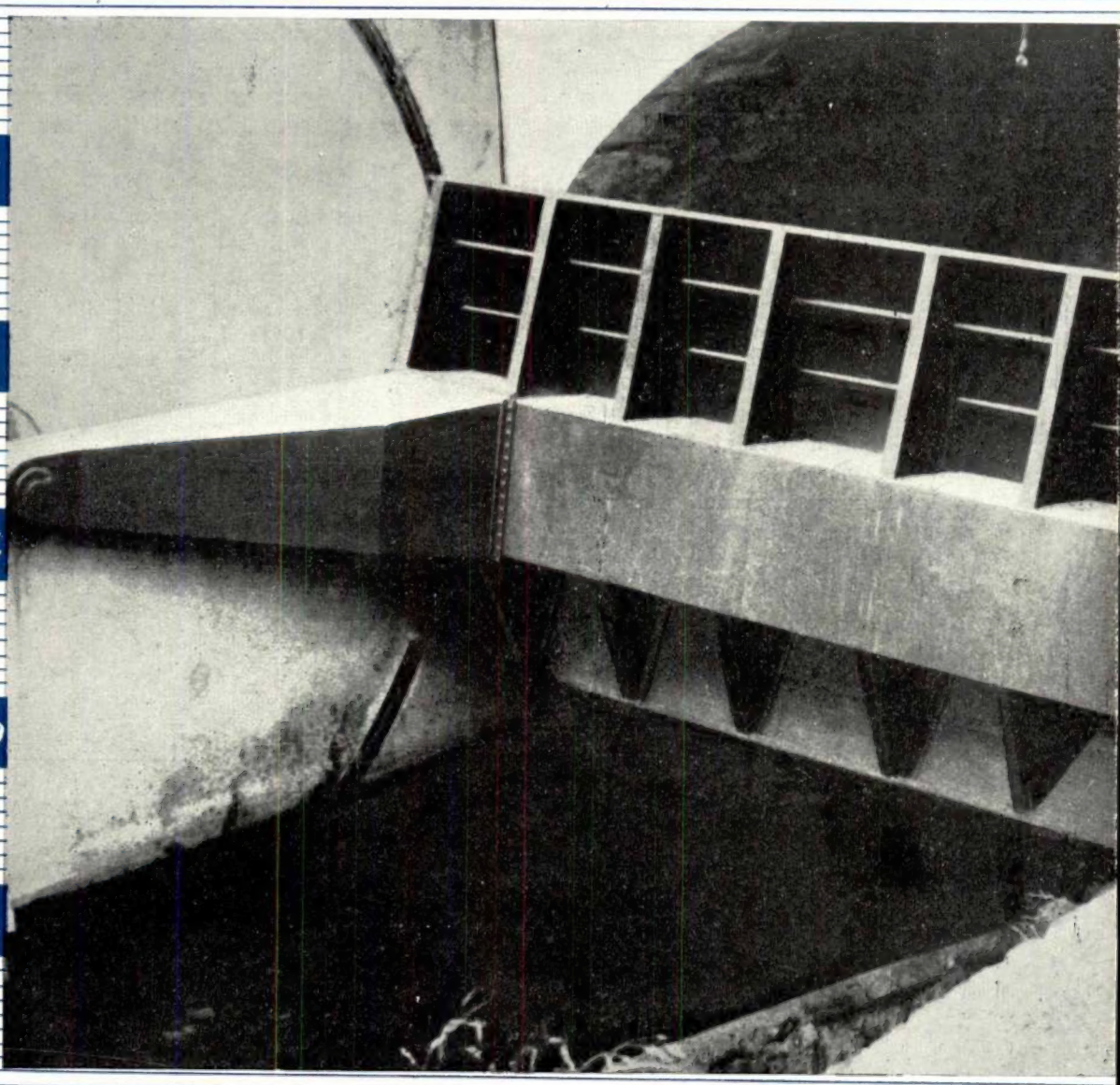
conomia

ecnologia

ociologia

vestigação

edagogia



OUTUBRO 1961

315

Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 028824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

Desde o
Distrito de **VIANA DO CASTELO**
ao de **LEIRIA** e nos Distritos
de **SETÚBAL** e **ÉVORA** as

FÁBRICAS
CIDADES
VILAS e
ALDEIAS portuguesas

são abastecidas de

ELECTRICIDADE

para

FORÇA MOTRIZ E TODOS OS USOS INDUSTRIAIS, LUZ, ETC., a TARIFAS MUITO VANTAJOSAS e com as maiores facilidades,

pela

UNIÃO ELECTRICA PORTUGUESA

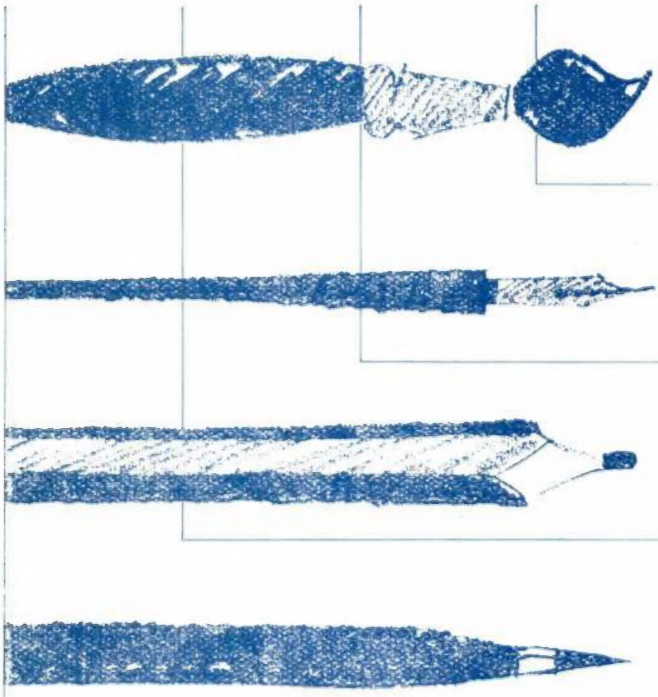
e produzidas nas CENTRAIS:

Thérmica do FREIXO	22.000 CV
Hidráulica do LINDOSO.....	100.000 CV
Thérmica da CACHOFARRA...	14.000 CV

Os Escritórios da UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA são:

NO PORTO Rua Duque de Loulé, 148
EM LISBOA Rua Rosa Araújo, 35

4 papeis suiços de alta qualidade, para todas as necessidades técnicas



DÉPOSÉ SIHL SUPERBUS

Papel de desenho mate e acetinado granitado para aguarelas.

SIRIUS

Papel de desenho acetinado.

ASSISTENT

Papel de desenho mate.

Utoplex

Papel vegetal mate e acetinado.

Exija expressamente Papel Sihl
Papeteries Zuricoises sur Sihl Zurich

SIHL

Representantes em Portugal:
E. BRUNNER & CA., LDA., Rua de Aviz, 13, Porto
Distribuidores: DETÉCNICA
— Equipamentos Técnicos de Desenho, Ld.ª
Av. de Berna, 46-1.º D Telef. 765321

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA DOS ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Ano XXXIV - N.º 315 Outubro de 1961

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-N. * TELEF. 77 01 44 (Linha 50)

DIRECTOR
MIGUEL FALCÃO

ADMINISTRADOR
RAMIRO CONFRARIA

REDACTORES
JOSÉ PINHEIRO PINHARANDA
JOSÉ ALBERTO FERNANDES
ANTÓNIO ALVES MACEDO

*

NUMERO AVULSO 15$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	37$50	60$00	110$00
Ultramar Português e Espanha	—	65$00	120$00
Estrangeiro	—	70$00	130$00

*

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

*

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.da
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Comporta de Sector na Ribeira de Alenquer
Altura da água — 3 m
Largura da comporta — 7,940 m
Vedação de borracha sobre inoxidável
Projecto: Prof. J. Sequeira
Construção: L. Dargent, Ld.ª e Automecânica da Beira, Ld.ª

Págs.

A dinâmica das funções directivas
Por Luís A. de Almeida Alves 1

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional** 6

Estabilidade intrínseca e condicionada de sistemas termoestáticos
Por António Gouvêa Portela 7

Ciclos especiais
Por João Carlos Adrião de Sequeira 33

Reconhecimento de maciços rochosos, por sondagens, para o estudo das fundações de barragens
Por J. Laginha Serafim e F. Marques Seabra 45

Duques de Alba elásticos — Algumas notas para orientação da sua escolha e cálculo
Por António Guedes de Campos 53

Medição de índices de alteração no estudo da deformabilidade das rochas
Por F. H. Anton Hamrol 68

Biblioteca 71

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

Pág.

A

Agência Geral de Material Eléctrico, Ltd.ª L
A. Gestetner XI
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . XLII
Alfredo Alves XXIII
Asea Eléctrica Ld.ª XXXIV
Azevedo & Pessi, Ltd. XXXIV

C

Canelas & Figueiredo, Lda. XLIX
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . X
Companhia Cimento «Tejo» IV
Companhia Industrial de Madeiras Africanas XXVI
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos XV
Companhia Portuguesa dos Petróleos BP XXXII
Companhia União Fabril XVIII
Construções Técnicas, Ltd.ª XXXV
C. Santos, Ltd.ª . . . . . VI e XIV
Crane XXII

D

Detécnica . . . . . 2.ª da capa

E

Electro-Arco, Ltd.ª XI
Electro Central Vulcanizadora, Ld.ª XLV
Electrotécnicos Reunidos XXX
Emílio de Azevedo Campos & C.ª, Ltd.ª XXXVI
Empresa Electro Cerâmica XLI
Empresa Nacional de Aparelhagem Eléctrica XXVIII
Empresa de Produtos Asfálticos . . . VII
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos XIII
English Electric VIII
Eng.º Augusto Cavaco XI
Estabelecimentos Herold XLVII
Estores Sunway XXXIII

F

Fábrica Portugal II
Fanafel XX
Filfro, Lda. XXVI

G

Guedes & Almeida, Lda. XLVIII

H

Harker Sumner & C.ª, Ltd. XLV
Henriques & Castro, Ltd.ª X
H. Vaultier & C.ª XXXIV

Pág.

J

J. J. Gonçalves, Sucrs. XLIV

K

Kellogg International Corporation XL

M

Martin Leslie & C.ª Lda. XX
Monteiro Gomes, Ltd.ª XII

O

Orlando Fernandes XXX

P

Papelaria Fernandes XXVII
Pimentel & Casquilho, Ltd.ª III

S

S. E. Moniz da Maia & Vaz Guedes, L.da XVII
SHELL XXI
Soabal, Ltd. XXXVII
S. Com. de Isolamentos de Cortiça XXXIX
Soc. Comercial Romar, Lda. . XIX e XXIX
Sociedade Construtora Portuguesa, Ltd.ª I
Sociedade de Electricidade Brown Boveri . . . . . 4.ª da capa
Sociedade Ericson de Portugal . . . XLIX
Sociedade Industrial Metalúrgica . XI
Sociedade Michaelis de Vasconcellos XVI
Sociedade Portuguesa Cavan IV
Sociedade Técnica de Equipamentos e Tractores, Lda. . . . . . (Intercalado)
Société Louis de Roll V
Sofomil XLVI
Sonap XXIV
Sondagens Ródio, Ltd.ª XLIX
Standard Eléctrica IX

T

Terrys XLIII
Tudor XXV

U

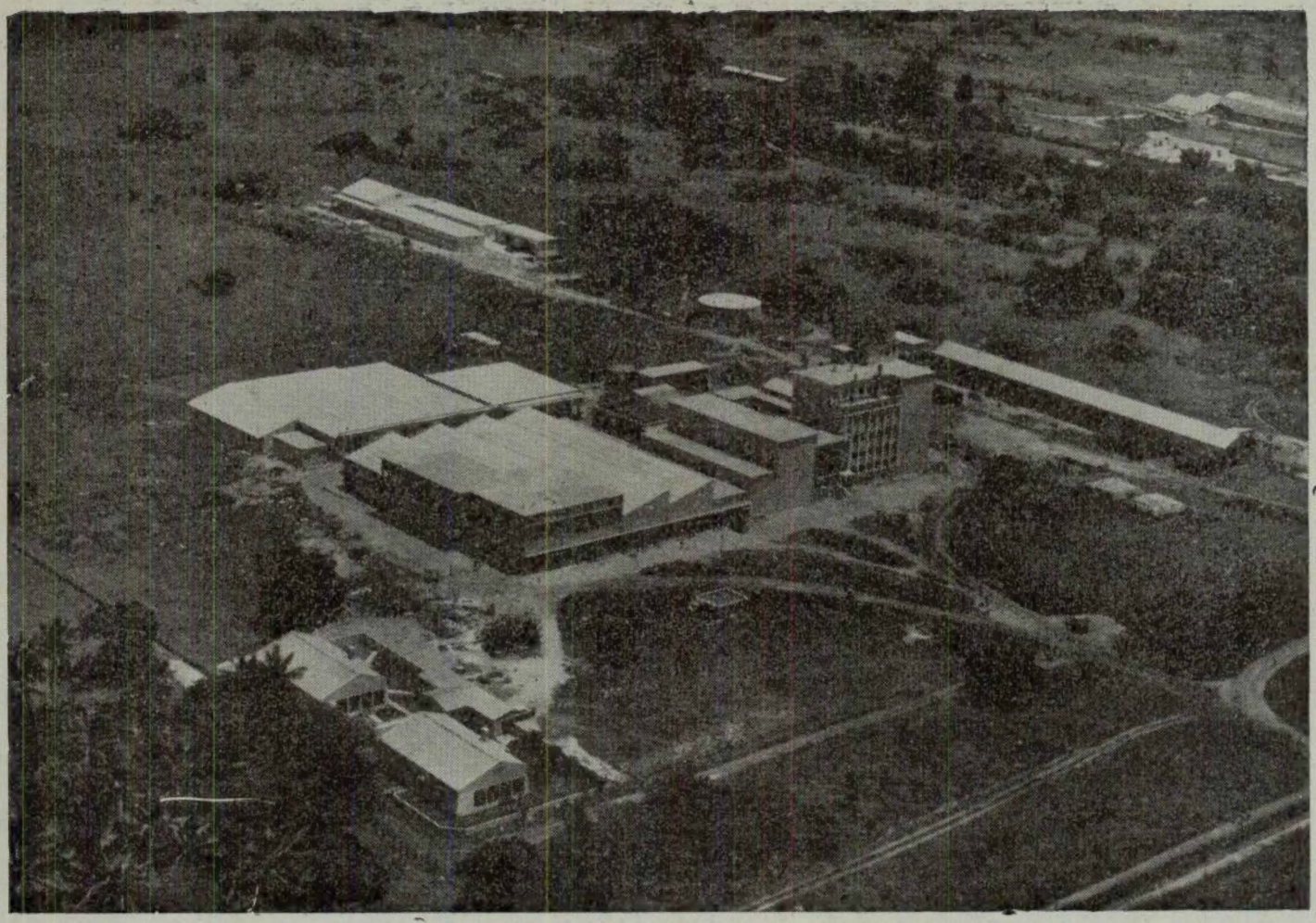
União Eléctrica Portuguesa . . . . . 2.ª da capa

V

Vitrofib XLI

W

Wild Portugal, Lda. XXXI



FÁBRICA DE CERVEJAS NA BEIRA
(MOÇAMBIQUE)
PORTUGAL

ASSENTE SOBRE

267

ESTACAS FRANKI

FUNDAÇÕES FRANKI

Sociedade Construtora Portuguesa, Lda.

Praça do Areeiro, n.º 9, 4.º Esq. — Lisboa — Tel. 72 60 61 e 72 99 11

Fábrica Portugal

S. A. R. L.

LISBOA

MOBILIÁRIO METÁLICO

EM TODOS OS GÉNEROS

Instalações completas para :

Mobiliário moderno
para

ESCRITÓRIOS
ESCOLAS
BIBLIOTECAS

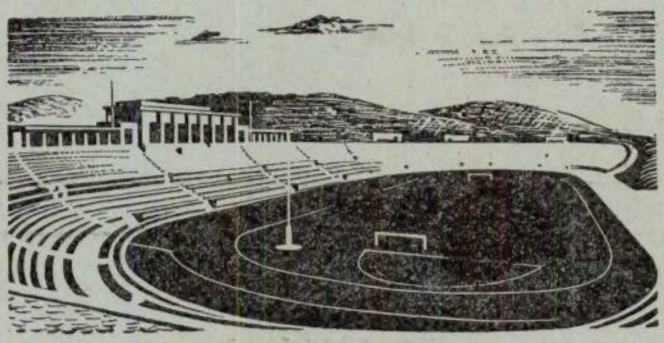
CLINICAS
HOSPITAIS
SANATÓRIOS
CINEMAS
HOTÉIS
ESPLANADAS

SALAS DE EXPOSIÇÕES :

Rua Febo Moniz, 2 a 20 — Praça dos Restauradores, 49 a 57

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

QUASE 40 ANOS AO SERVIÇO DA ENGENHARIA PORTUGUESA



GRANDE SORTIDO DE INSTRUMENTOS DE PRECISÃO, CIENTÍFICOS E INDUSTRIAIS

RUA DAS PORTAS DE SANTO ANTÃO, 75
LISBOA
TELEF.: 32 43 14 — 32 42 48 ✦ TELEG.: TECNA

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS

MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA

MANILHAS PARA ESGOTOS

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A

TELEF. 47812-50129

LISBOA

COMPANHIA "CIMENTO TEJO"

PORTUGAL

TEJO

CIMENTO PORTLAND NORMAL

Em todos os trabalhos de responsabilidade utilize

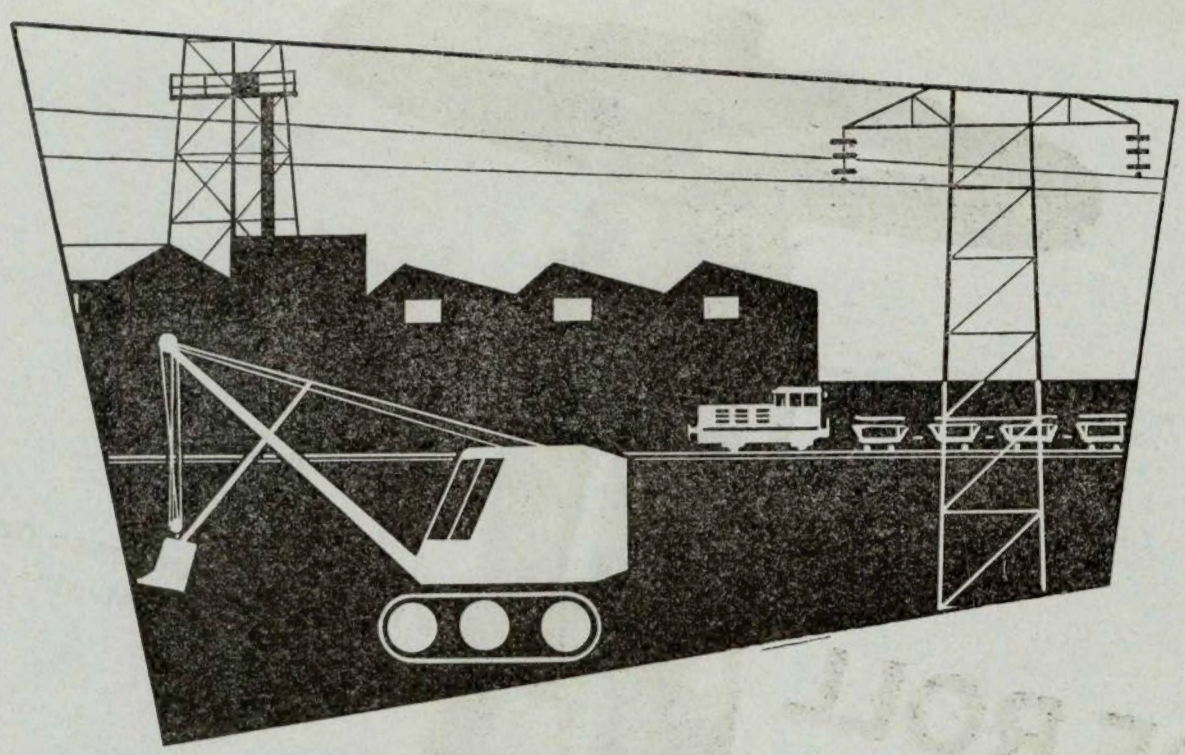
CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA COM CINCO LINHAS DE FABRICO

SEDE: R. DA VITÓRIA, 88 — LISBOA 2

TELEF. 28953/28552

Válvulas de cunha, para vapor
Placas de obturação articuladas sobre uma esfera. Estanqueidade permanente
1 Válvulas de passagem
Sede de estanqueidade e haste de aço inoxidável
2 Válvulas para matérias pastosas
Sem necessidade de conservação (sem prensas-estopa nem tampas de limpeza)
3 Válvulas de sede oblíqua
para ácidos. Liga cromo-niquel-molibdeno
4 Válvulas de membrana de borracha
Sem prensa-estopa
5 Válvulas de macho
Com elevada resistência aos ácidos
6 Válvula de cunha. Sem prensa-estopa
à frente no progresso da construção de válvulas
DE ROLL
Klus (Suiça)
Representantes em Portugal:
Socotel, Lda.
Rua Sá da Bandeira, 651-4°, Porto
Tel. 27013
1
2
3
4
5
6



MERCEDES-BENZ

MOTORES INDUSTRIAIS DIESEL

MOTORES PARA TODAS AS APLICAÇÕES INDUSTRIAIS
FAMOSOS EM TODO O MUNDO PELA SUA GRANDE ROBUSTÊS, ECONOMIA
DE CONSUMO E FACILIDADE DE MANUTENÇÃO
MODELOS DESDE 15 A 2.500 H. P.

EM ARMAZÉM:

MODELO M B 841 B	25 H. P. — 1.000 R. P. M.
MODELO M 202 B	55 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 203 B	90 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 204 B	120 H. P. — 1.200 R. P. M.

OUTROS MODELOS PARA ENTREGA MUITO RÁPIDA

MOTORES A 4 TEMPOS · ARREFECIMENTO POR ÁGUA
ARRANQUE A AR COMPRIMIDO OU ELÉCTRICO

REPRESENTANTES C. SANTOS LDA. — DIVISÃO MARÍTIMA E TÉCNICA

29, AV. DA LIBERDADE, 41 — LISBOA
160, R. DE S.TA CATARINA, 168 — PORTO

Celulite

ISOLAMENTO TÉRMICO DAS CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS

*

TECTOS

*

PAREDES

*

CÂMARAS FRIGORÍFICAS

*

ISOLAMENTOS INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. ✦ RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º ✦ TEL. 73 01 56 — LISBOA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA

TELEF. 73 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS

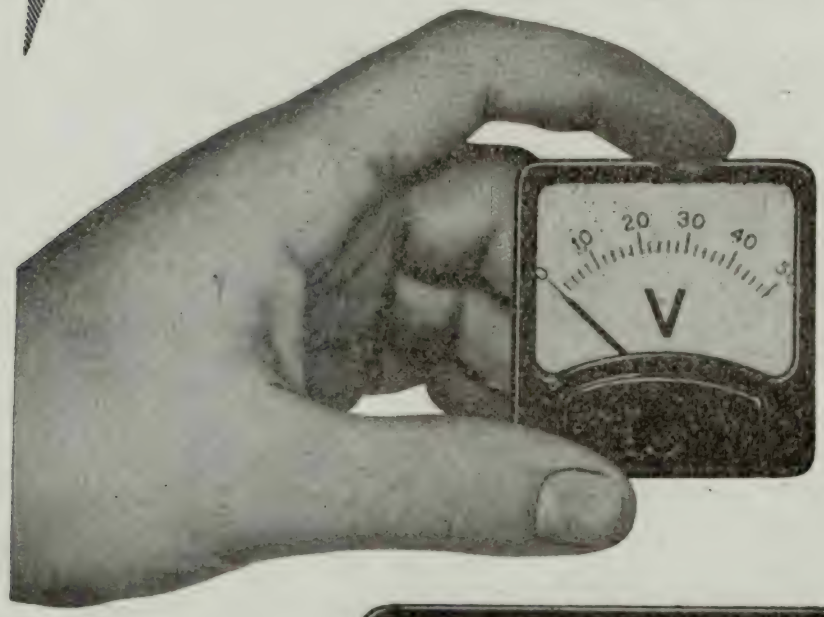
IMPERMEABILISADOR

IMEPA

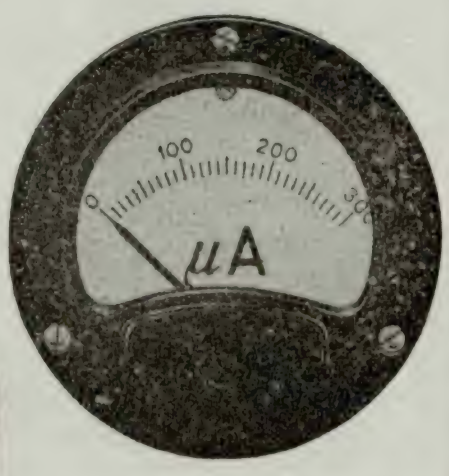
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º-LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

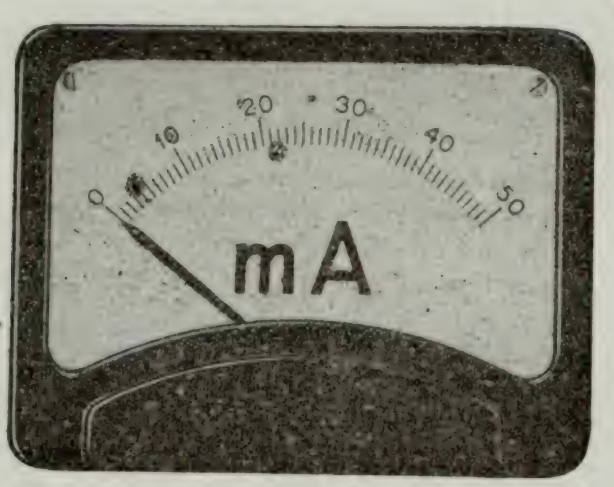
Instrumentos tipo miniatura



Voltimetro de quadro móvel, quadrado, de 2"



Microamperimetro de quadro móvel, redondo, de 2 ½"



Miliamperimetro de quadro móvel, rectangular, de 3"×4"

Instrumentos indicadores para todos os fins e aplicações, contadores, relés de protecção e auxiliares, construídos e ensaiados segundo métodos modernos e satisfazendo as normas mais rigorosas

'ENGLISH ELECTRIC'

ENGLISH ELÉCTRICA DE PORTUGAL, LIMITADA

Rua Cascais, 47 (Alcântara) — LISBOA 3

Standard Electrica S.A.R.L.

Associada da

INTERNATIONAL TELEPHONE AND TELEGRAPH CORPORATION

DE NOVA YORK

TELECOMUNICAÇÕES

ELECTRÓNICA

AV. DA INDIA — LISBOA

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 0464 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

DISTRIBUIDORES EM PORTUGAL

HENRIQUES & CASTRO, Lda.

AVENIDA CONDE DE VALBOM, 96 LISBOA

TELEF. 77 50 57 - 77 50 58

ELECTRO-ARCO
LIMITADA

ELECTRODIOS
POSTOS E ACESSORIOS
PARA A SOLDADURA ELECTRICA

MATERIAL APROVADO PELO
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
VENDA NOVA —— AMADORA
LISBOA
RUA SILVA CARVALHO, 239 — TEL 683649
PORTO
RUA DO BOLHÃO, 216 — TEL 21277

DUPLICADORES

Manuais e eléctricos.

Gestetner

OS MELHORES
DO MUNDO

A GESTETNER, L.DA

RUA DA CONCEIÇÃO, 125 Telefone 2 2628 - LISBOA | LARGO DO PADRÃO, 20, 1.º Telefone 2 3469 - PORTO

SOCIEDADE INDUSTRIAL METALURGICA

Responsabilidade Limitada
(REGISTADO)

SERRALHARIAS,
CALDEIRARIA,
FERRARIA,
FUNDIÇÕES

ESCRITÓRIO
Rua de S. Tiago, 13
LISBOA
Telefone 86 19 72

SONDAGENS
FUNDAÇÕES
CAPTAÇÕES DE ÁGUA
REBAIXAMENTOS
DE NÍVEIS AQUÍFEROS

RUA RODRIGO DA FONSECA, 62 · LISBOA · TELEF. 5 3873

DM Empilhadores Hidráulicos

Fabricação Italiana

Eléctricos • A Gasolina • Diesel

Para todos os géneros de trabalho

Em armazém
para entrega
imediata

Capacidade de carga
desde 600 a 3000 kg
alturas de elevação
até 4 metros

modelo
DM 12-4 r

Representantes exclusivos para Portugal Continental e Ultramarino

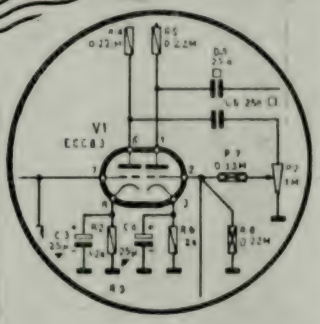
MONTEIRO GOMES, LIMITADA

Rua Cascais, 47 (Alcântara)

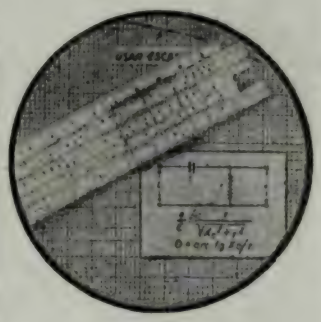
LISBOA

LUANDA **PORTO** LOURENÇO MARQUES

EQUIPAMENTO DE AMPLIFICAÇÃO DE LUXO



BEM CONCEBIDO
BEM CALCULADO
CONSTRUIDO



LESA

A grande marca italiana

Representantes em Portugal

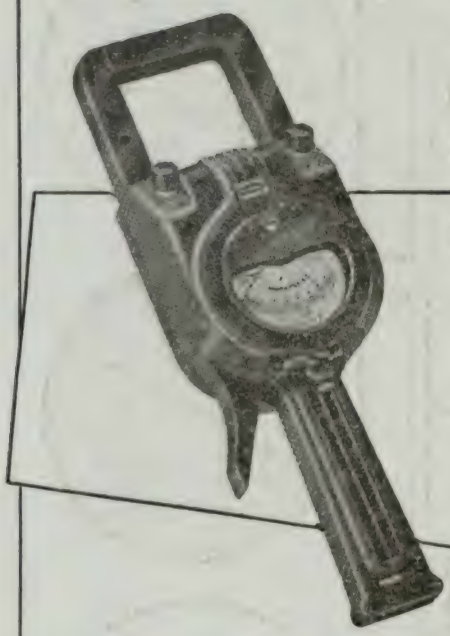
TELECTRA

EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S. A. R. L.

Rua Rodrigo da Fonseca, 103, r/c
LISBOA — Tel. 68 60 72

Rua Sá da Bandeira, 766-1.º E.
Tel. 2 48 18 — PORTO

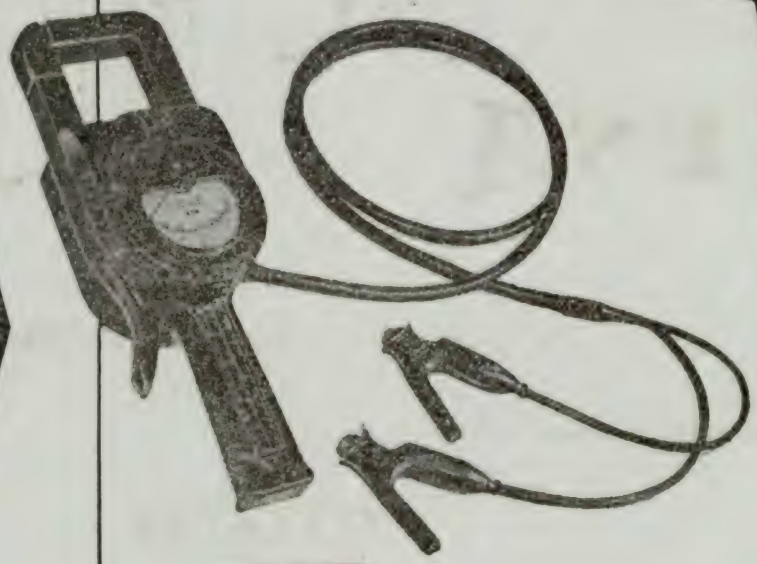
PINÇAS FERRANTI



PINÇAS VOLT—AMPERIMÉTRICAS

7 ESCALAS

EM AMPÈRES	EM VOLTS
0 – 10 AMPS.	0 – 150 V
0 – 25 »	0 – 600 »
0 – 100 »	
0 – 250 »	
0 – 1000 »	



PINÇA WATTIMÉTRICA

7 ESCALAS

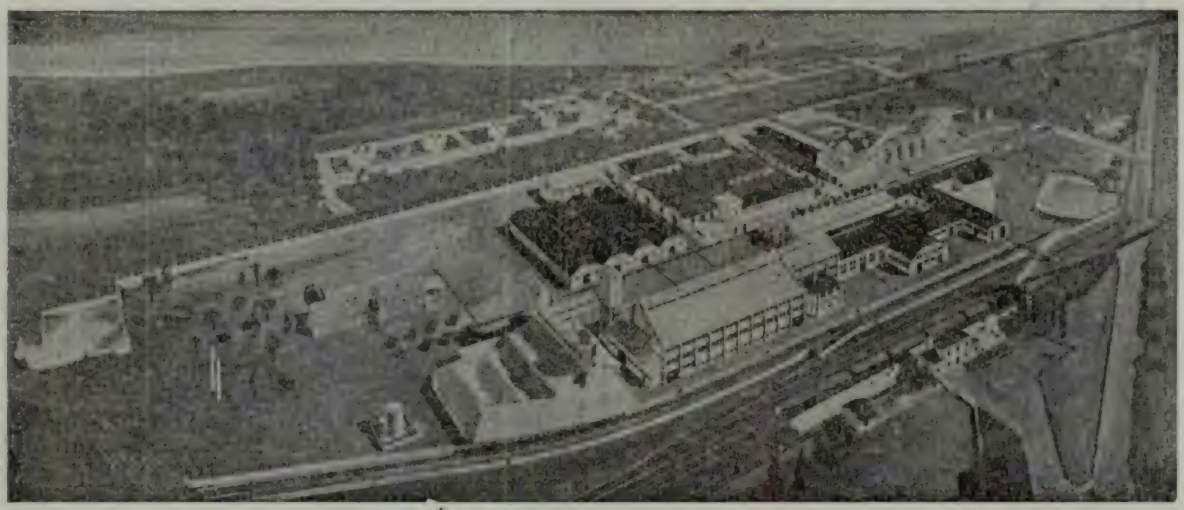
0 – 3 KW
0 – 6 »
0 – 12 »
0 – 30 »
0 – 60 »
0 – 120 »
0 – 300 »

REPRESENTANTES:

C. SANTOS LDA.

29, AVENIDA DA LIBERDADE, 41 — LISBOA

DIVISÃO MARÍTIMA E TÉCNICA
T. DA GLÓRIA, 17—LISBOA
160, R. STA. CATARINA, 168—PORTO



COMPANHIA PORTUGUESA DE FORNOS ELÉCTRICOS

PRODUTORA DE

FERRO GUSA

FERRO LIGAS

FERRO-MANGANÊS

SÍLICO-MANGANÊS

FERRO-SILÍCIOS

15 % - 25 % - 45 % - 75 % - 90 %

CARBONETO DE CALCIO

CIANAMIDA CÁLCICA

PASTA PARA ELÉCTRODOS

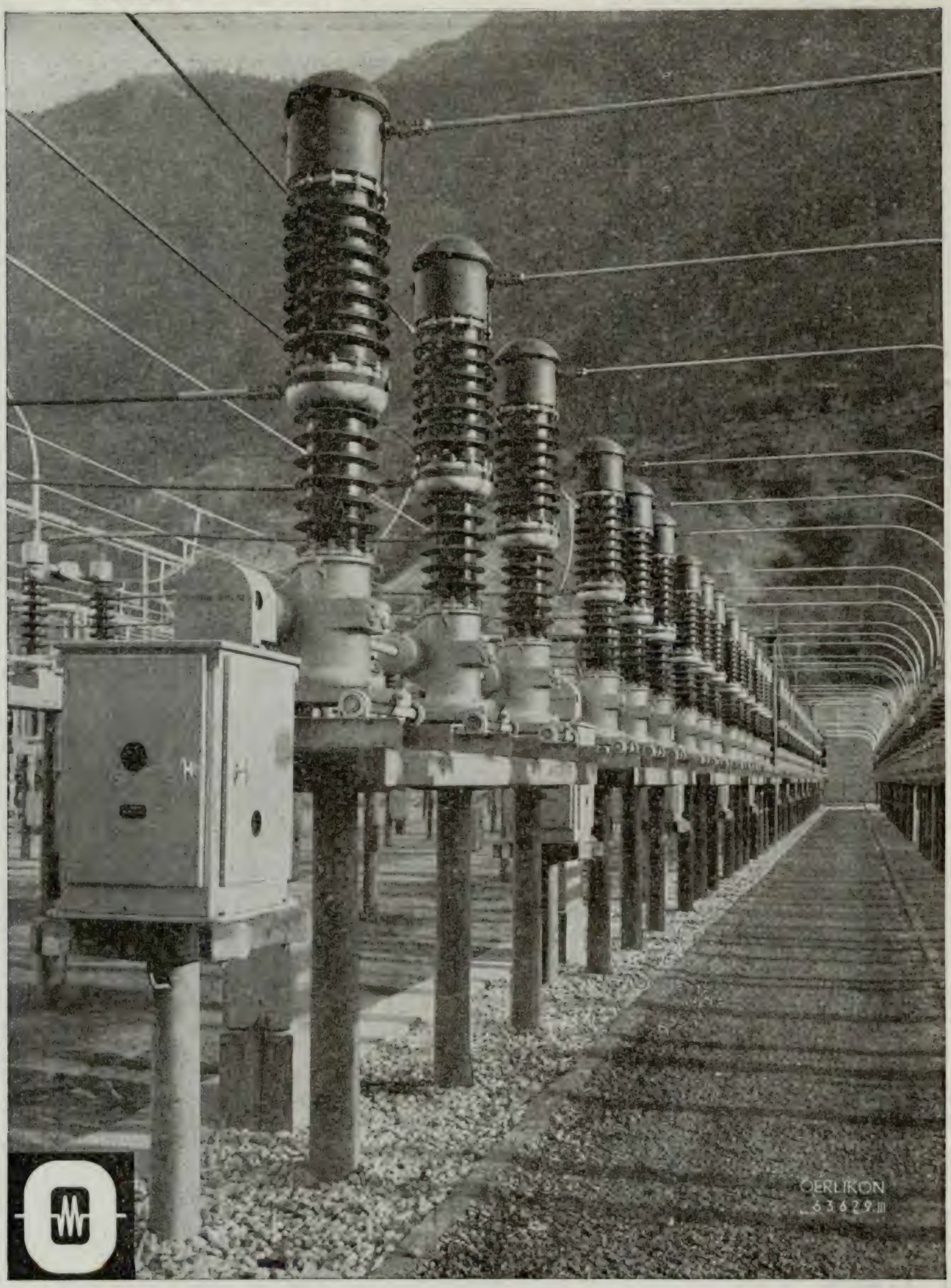
E EM MONTAGEM

GRAFITE

FÁBRICAS
CANAS DE SENHORIM
Telefone 67222

SEDE
Largo de S. Carlos, 4 - 2.º — LISBOA
Telefones 325343-35556-368989

Ateliers de Construction Oerlikon · Zurich 50



Disjuntores de pequeno volume de óleo, de alto poder de corte, tipo TOFQ 60.12, 2.500 MVA, tensão nominal 60 kV, intensidade nominal 1.200 A, numa instalação ao ar livre

Representante para Portugal e Ultramar: Sociedade Michaëlis de Vasconcelos, Lda.
PORTO — Pr. da Liberdade, 114 LISBOA — Av. Marquês de Tomar, 94

TÉCNICA

DIRECTOR: MIGUEL FALCÃO

Ano XXXVI — N.º 315 Outubro de 1961

C. D. U. 331.75:331.124.2

A dinâmica das funções directivas

PELO ENG.º QUÍMICO-INDUSTRIAL LUÍS A. DE ALMEIDA ALVES

Director do I. S. T.

Nos artigos que tenho publicado na «Técnica» nos últimos dez anos, considerei sempre como objectivo fundamental salientar o princípio da importância da Ciência, da Técnica e do Profissionalismo na estruturação económica do Mundo moderno.

A insistência com que tenho desenvolvido este princípio tem dado origem a uma crítica que, sob várias formas, me tem sido feita e que se traduz na afirmação de que estou deformado pelo «tecnicismo», não dando o relevo devido nem aos problemas humanos nem ao papel dos dirigentes.

A crítica pode ser considerada como válida na generalidade, apenas havendo que notar que a atitude por mim tomada tem sido absolutamente intencional, por virtude de um conjunto de razões que se expõem a seguir.

O fenómeno da industrialização que se desenvolve há duzentos anos, mas que só pode ser considerado como totalmente significativo desde o aparecimento dos motores térmicos, resultou de rasgos de génio de cientistas e de inventores e não constituiu, por isso mesmo, um processo de evolução que tivesse sido sempre sincronizado em todos os países.

Daí resultou que as descobertas científicas e técnicas começaram a ter um valor comercial em si, e desse modo, todos os países passaram a estar na situação de só poderem adquirir *por compra*, o «know-how» que fosse originado no trabalho de criação dos outros. E esse valor comercial é de tal maneira importante, que o número de patentes que anualmente se registam, nos nossos dias, chega a tornar-se quase inacreditável.

Nos países, cuja industrialização começou com um certo atraso inicial, a estrutura industrial de base foi estabelecida, em grande parte, à custa do conhecimento e da experiência do Estrangeiro e por isso, numa primeira fase, não se fez sentir a necessidade do trabalho de criação. E nessas condições, o potencial intelectual desses países teve de ser utilizado naturalmente, para garantir a eficiência dos meios técnicos à disposição e para movimentar a todos os níveis os recursos humanos indispensáveis.

Foi-se formando assim um conceito de *dirigentes* com características de *coordenadores* cuja técnica de actuação tem dado origem a numerosos estudos sobre organização industrial.

Bàsicamente, esses estudos constituem uma cinemática visto que se revestem de uma forma de geometria expressa em função do parâmetro tempo. Por outras palavras, ocupam-se de estados de movimento pré-estabelecidos, sem fazer apêlo, em muitos casos, a análise das causas susceptíveis de os promover.

Simplesmente, não há nenhum país que tenha vantagem em se limitar a comprar a «técnica» no exterior, não só porque isso representa uma fonte de saída de divisas, como também

nem sempre permite fazer face no momento oportuno, à concorrência apertada a que os progressos da Tecnologia podem dar origem.

Quer dizer portanto que todos os países precisam de estar equipados para progredirem por si próprios nos campos da Ciência e da Técnica e nessas condições, a acção directiva tem de se fazer sentir principalmente, no aspecto dinâmico das forças de inércia que andam associadas ao trabalho de criação.

Mas é evidente que essas forças de inércia só podem ser superadas pelos profissionais de nível universitário e por isso, não faz sentido estar a equacionar a função dos dirigentes, sem que a importância desses profissionais constitua uma noção assente e indiscutível.

É portanto esta, a razão que justifica a atitude de que eu tenho tomado até agora; mas no momento actual em que, com bastante generalidade, se aponta a necessidade imprescindível de muitos cientistas e de muitos técnicos, julgo que possa ser vantajoso tentar fazer uma análise profunda do problema directivo, dedicando o artigo presente a definir, para começar, o aspecto dinâmico da sua esquematização.

Quanto aos problemas humanos que atrás também foram referidos, terão de ser deixados ainda para mais tarde, por estarem directamente relacionados com os factores que afectam o profissionalismo a todos os níveis e condicionam a acção directiva no sentido de uma eficiência máxima de resultados.

* * *

Sob o ponto de vista dinâmico, *dirigir* consiste em aplicar um «sistema de forças» a um agregado humano de modo a conferir-lhe um determinado «estado de movimento».

Esta definição é particularmente cómoda porque, sendo intrinsecamente exacta, nos vai permitir analisar com objectividade, todas as consequências que resultam de transportar para o campo das estruturas sociais, as propriedades conhecidas dos sistemas mecânicos.

E tem ainda a vantagem de reduzir o problema apenas a cinco elementos, considerando-se por um lado, as forças aplicadas e as forças interiores e por outro lado, as forças de inércia, as reacções e as forças de atrito.

Verifica-se, além disso, que a linguagem corrente adopta já no estudo de problemas sociais, os termos de *inércia, reacções* e *atrito*, na apreciação de certos aspectos do comportamento dos agregados humanos. Apenas há que assinalar no entanto, que o emprego desses termos nem sempre é totalmente correcto porque são considerados muitas vezes como sinónimos, o que, na realidade, não está de acordo com o seu significado dinâmico.

Acontece por isso, que se faz com frequência a afirmação de que é necessário recorrer a *técnicas de relações humanas*, para vencer a inércia, as reacções e os atritos.

Mas esta afirmação que aparentemente é de uma generalidade indiscutível, é bastante vulnerável na sua essência.

Com efeito, a única força dos sistemas dinâmicos que pode ser identificada com as resistências psicológicas é a força de atrito e nessas condições, é legítimo formular as seguintes duas bases de raciocínio:

— Ou é essa a única força a considerar na dinâmica directiva e nesse caso, os termos de reacções e de inércia estão cientìficamente mal aplicados.

— Ou existem reacções e forças de inércia no sentido dinâmico e é necessário esclarecer qual a sua equivalência no campo social.

Para podermos decidir entre as alternativas postas, comecemos então por analisar mais de perto a origem destas duas últimas forças.

Como se sabe, as *reacções* são resultantes das ligações a que o sistema está submetido e por isso, representam um factor externo que se adiciona aos restantes dados desse sistema. E por outro lado, o seu valor vem sempre expresso em função das restantes forças actuantes, incluindo, como não pode deixar de ser, as *forças da inércia*.

Quanto a estas últimas, não faz sentido considerá-las como «resistências» visto que elas estão

integradas no conteúdo intrínseco do sistema desde que apareçam acelerações isto é, desde que se introduzam alterações no estado de movimento existente.

Seja como for, nenhum destes dois tipos de forças se pode incluir na categoria de «forças evitáveis» porque as reacções só não se produzem quando não há ligações e as forças de inércia só não aparecem nos sistemas em repouso ou, quando muito, animados de movimento rectilíneo e uniforme.

Deve notar-se que esta afirmação é susceptível de ser transportada «ipsis verbis» para o campo dos agregados humanos, visto que por um lado, a estrutura social implica um certo número de *ligações* e por outro lado, não pode deixar de existir um *princípio de inércia* associado a qualquer forma de alteração.

Parece portanto, que existe uma equivalência completa entre as forças clássicas da Mecânica e as forças de origem psicológica e social pelo que se poderá estudar em pormenor, a maneira como essa equivalência se reflecte no equacionamento e resolução dos problemas directivos. No entanto, deixaremos este ponto para outro artigo a publicar mais tarde (1), para nos concentrarmos por agora, no estudo das forças de inércia, por serem essas que determinam a viabilidade imediata das acções exercidas sobre os agregados humanos.

Aliás, este estudo poderá servir-nos para interpretar e esclarecer determinadas contradições a que o exercício da acção directiva pode conduzir.

* * *

Fundamentalmente o problema directivo põe-se nos seguintes termos:

É dado um agregado humano com uma «massa» determinada, com o qual é necessário atingir um determinado objectivo no fim de um dado tempo. Pretende-se estudar a «força» a aplicar para vencer a «força de inércia» que se origina.

Admitamos, por hipótese, que essa «força» era susceptível de ser determinada quantitativamente. Nessas condições, poder-se-ia em princípio, estabelecer uma comparação com as «forças directamente disponíveis» e inferir daí imediatamente se o problema poderia ter solução.

Simplesmente essas forças disponíveis estão localizadas nos diversos níveis da estrutura social, embora os dirigentes em cada um desses níveis tenham de dominar todas as forças que deles dependem; mas, como a sua acção directa é necessàriamente limitada, é-se conduzido à conclusão de que *dirigir* terá de ser fundamentalmente uma técnica de *servo-comandos*.

Como se sabe, um servo-comando é um dispositivo em que um sinal de fraca intensidade é amplificado de modo a actuar sobre um elemento motor que provoca determinados movimentos; e sendo assim, a eficiência das funções directivas depende em grande parte dos circuitos de amplificação que tenham sido montados.

A função directiva deixa assim de ser essencialmente coordenadora, para se transformar num processo de utilização de uma rede complexa de servo-comandos, capazes de concretizarem, sob a forma energética os sinais que lhes são transmitidos.

Posto o problema nestes termos, conclui-se que a actuação directiva no sentido de dominar as forças de inércia, tem de ser alicerçada nos seguintes três pontos de apoio:

— *Autoridade* para emitir os sinais.
— *Realismo* para montar uma rede de servo-comandos eficiente.
— *Profissionalismo* para existirem servo-comandos de elevado nível científico e técnico.

Deve notar-se que estas conclusões resultam fundamentalmente da consideração do factor tempo, visto que as forças de inércia são tanto mais intensas quanto mais elevadas forem as acelerações impostas ao sistema de partida.

---

(1) A Organização e os Sistemas Dinâmicos.

Esta conclusão é particularmente importante porque, constituindo o progresso técnico a base da concorrência comercial e sendo o progresso pela sua própria natureza, a origem principal das forças de inércia da Indústria, as condições de concorrência serão teòricamente tanto mais favoráveis quanto maior for a autoridade e o profissionalismo e quanto mais perfeita a rede de servo-comandos da estrutura técnica.

Quer dizer portanto, que o problema fundamental dos dirigentes na época presente consiste em conhecerem com rigor as características dos servo-comandos que devem utilizar, para atingirem os objectivos que lhes são fixados pela Administração das empresas para que trabalham.

Por outras palavras, a grande dificuldade não está em dirigir *pessoas*, mas sim em dirigir *profissionais*, de maneira a constituir com eles uma estrutura funcional que estimule a sua capacidade criadora, reduzindo ao mínimo simultâneamente, todas as perdas de energia por dispersão de esforços.

Deste modo, os problemas directivos em pouco diferem dos problemas do profissionalismo e da valorização científica e técnica e é isso que tem justificado o desinteresse aparente que me tem sido apontado em relação à importância desses problemas.

Em todo o caso, é legítimo que se possa objectar que, se o problema é redutível às bases que se acabam de expôr, não se explica fàcilmente por que razão os tratadistas atribuem uma importância tão grande às «técnicas de relação humanas».

Tentaremos, por isso, esclarecer este ponto, a seguir.

* * *

Sob o ponto de vista estritamente lógico, a dúvida pode ser interpretada de três maneiras:

1) Alguns tratadistas sobre problemas de organização não serem profissionais nesse assunto.

2) A esquematização feita anteriormente não ser totalmente válida.

3) Admitir-se, por hipótese, que os problemas relativos às forças de inércia e às reacções se encontram automàticamente resolvidos.

A primeira interpretação rejeita-se desde já sem qualquer estudo ulterior, por ser teòricamente absurda.

A segunda está em contradição com a articulação de premissas que foi considerada e por isso parece também ser de pôr de parte.

Resta-nos portanto, a terceira que, por ser a única viável, justifica uma análise circunstanciada das implicações a que dá origem.

É evidente que o fenómeno da criação não resolve, só por si, as dificuldades inerentes à industrialização dos processos; e como esta se faz pela intervenção de *pessoas*, os resultados técnico-económicos obtidos são função da maneira como essa intervenção se exerce. Nestas condições, as técnicas de organização e de relações humanas aparecem como sendo primordiais; simplesmente, essas técnicas não contêm na sua essência germens de renovação e de progresso e, por isso mesmo, os resultados da sua acção são totalmente condicionados pelos suportes científico-técnicos sobre os quais têm de ser aplicadas.

Imaginemos que um grupo de dez pessoas tinha por objectivo fazer a terraplanagem de uma determinada área e que era possível concluir o trabalho em sete meses. Imaginemos em seguida que essas mesmas dez pessoas convenientemente dirigidas, poderiam realizar o trabalho apenas em três meses.

Mas nada nos impede de imaginar também que houvesse quem se lembrasse de utilizar uma escavadeira mecânica que permitisse reduzir o tempo total para uma semana.

Estamos assim em presença de duas soluções de redução de tempo, de índoles totalmente diferentes — uma por utilização dos recursos existentes e outra por emprego de um novo método técnico de execução.

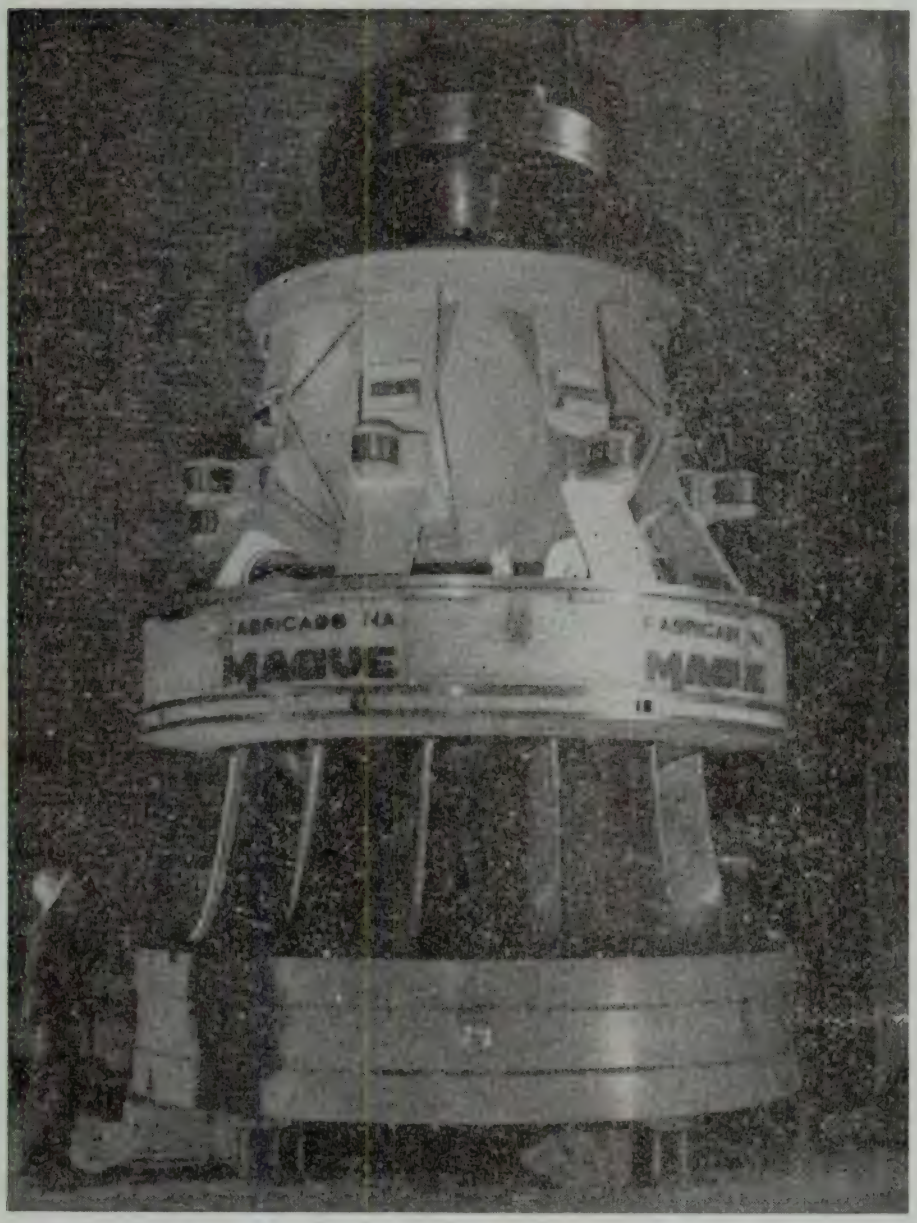
A segunda solução significa um *progresso* em relação à primeira, mas só é de aplicação possível *se o dirigente souber da sua existência e se conhecer as condições em que essa aplicação deve ser feita.*

MAGUE

CONSTRUÇÕES METALO-MECÂNICAS MAGUE, L.DA

(S. E. MONIZ DA MAIA & VAZ GUEDES, L.DA)

Alverca — Portugal



Aspecto do Octopode com roda de uma das três turbinas «Francis», de 80.000 CV, destinadas à Central de Miranda do Douro, construídas por Construções Metalo Mecânicas Mague, S. A. R. L., segundo projecto e licença dos Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey, S. A.

•

PROJECTO E FABRICO DE

PONTES ROLANTES
GUINDASTES
GRUAS, DERRICKS E GUINCHOS
APARELHOS DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS
CONSTRUÇÕES METÁLICAS PESADAS

COMPORTAS
TURBINAS
CONDUTAS FORÇADAS
BLINDAGENS

DIVISÃO METALO-MECÂNICA

COMPANHIA UNIÃO FABRIL

AVENIDA 24 DE JULHO, 170 — LISBOA

comporta da barragem do Maranhão construída pela companhia união fabril

Isto não quer dizer, que mesmo no caso da solução mais progressiva, a eficiência final não seja também função da técnica directiva que for empregada.

Nem quer dizer mesmo que o problema das relações humanas, considerado em si, isto é, dissociado do aspecto utilitário do rendimento do trabalho, não seja digno de ser encarado com a maior atenção.

Simplesmente, estamos em presença de um aspecto formal que não vai afectar a rede de servo-comandos disponível nem a potencialidade energética de cada um. Quando muito, poderá reduzir determinadas forças de atrito, as quais, nos sistemas de grande evolução, são em geral, muito inferiores às forças de inércia e às reacções.

Essas forças de atrito só serão predominantes nos sistemas quase estacionários e neste caso é natural que o problema das relações humanas seja fundamental por nos aproximarmos então do dirigente de tipo coordenador.

Sem pretendermos, neste artigo, analisar quais as causas que podem dar origem às forças de atrito, podemos considerar, como ponto de partida, que todo o indivíduo, como ser psicológico, tem as seguintes aspirações fundamentais, no exercício da sua actividade:

— Ser útil como Homem e como profissional;
— Não ser um elemento anónimo de uma estrutura;
— Ter uma intervenção criadora nos resultados a atingir.

Acontece por isso, que numa estrutura essencialmente cinemática ou estática, é difícil satisfazer a estes dois últimos pontos e deste modo, as forças de atrito originam-se com bastante facilidade, justificando portanto, todos os estudos que se façam no sentido de as eliminar.

Numa estrutura dinâmica, mesmo que possa haver uma insuficiência em relação ao primeiro ponto, as forças de atrito podem não chegar a originar-se, se a importância dos servo-comandos no funcionamento dessa estrutura constituir, por si própria, um gérmen de estímulo e de satisfação.

Mas como, por outro lado, as condições de exploração técnico-económica das empresas estão cada vez mais vinculadas ao dinamismo do progresso, o problema directivo vai tendendo a concentrar-se sobre as forças de inércia, reduzindo-se o estudo das forças de atrito a um conjunto de regras mais ou menos assentes sobre o comportamento humano, quer isoladamente, quer em sociedade.

As dificuldades directivas resultam, de um modo geral, mais de problemas de estrutura do que de problemas pessoais; simplesmente, como a dinâmica dessa estrutura é também da responsabilidade dos dirigentes, os insucessos que se registarem, não podem ser justificados alegando-se que se criaram forças de inércia insuperáveis.

São estas as forças que condicionam o fenómeno directivo e o transformam numa actuação profissional difícil de exercer, na complexidade das estruturas técnicas dos nossos dias.

E não vale a pena averiguar se dirigir exige vocação ou habilidade; de facto, essas qualidades não excluem a necessidade de uma intensa preparação para equacionar os meios indispensáveis ao cumprimento dos programas fixados.

E no cumprimento desses programas *os dirigentes não podem falhar.* Pode ser, no aspecto lógico, uma afirmação muito arrojada; mas no aspecto da segurança e do progresso das Nações, tem de constituir um axioma fundamental, que não pode deixar de ser válido, seja por que modo for.

C. D. U. 621.311.5/91

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.)

NOTA: *As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País*

I — Breve nota mensal

Sob o ponto de vista hidrológico, o mês de Julho apresentou-se, no conjunto, sensìvelmente médio.

II — Elementos gerais (GWh)

a) Mensais

	1960	1961	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	256,4	254,0	— 1
Produção térmica (P_t)	0,0	22,7	—
Produção total (P_T)	256,4	276,7	+ 8
Exportações (Ex)	—	0,0	—
Importações (I)	—	0,0	—
Produção para consumos não perman. (P_{cnp}) . .	60,0	60,7	+ 1
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	196,4	216,0	+10,0 (2)

b) Acumulados desde 1 de Janeiro de 1960 e 1961

	1960	1961	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	1736,0	1898,7	+ 9
Produção térmica (P_t)	43,2	40,2	— 7
Produção total (P_T)	1779,2	1938,9	+ 9
Exportações (Ex)	—	0,2	—
Importações (I)	—	0,2	—
Produção para consumo não perman. (P_{cnp}) . .	428,3	426,6	— 0
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	1350,9	1512,3	+11,9 (2)

NOTAS:

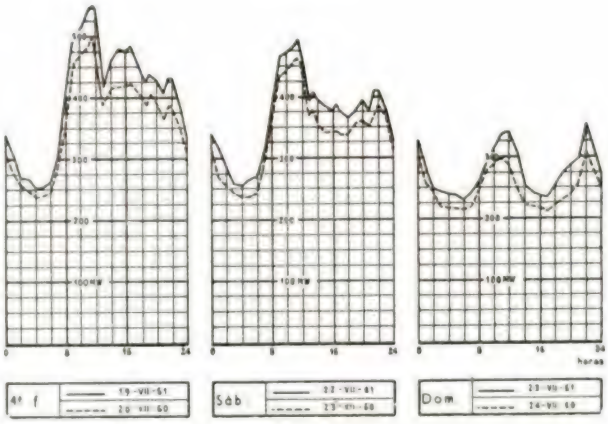
(1) A produção para consumos permanentes (P_{CP}) é determinada pela seguinte expressão: $P_{CP} = P_T - P_{cnp} + I - E_X$

(2) O aumento percentual de produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 11,2 e 13,0 %.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

	4.ª feira: 20-7-960	4.ª feira: 19-7-961
Produção hidráulica (P_h) — MWh	8835	8942
Produção térmica (P_t) — MWh . .	0	820
Produção total (P_T) — MWh . . .	8835	9762
Produção para consumos não permanentes — MWh	1891	1960
Potência máxima MW	501,0	550,5
Potência mínima MW	238,5	251,5
Utilização da ponta (U) — horas	17,6	17,7
Factor de carga (α)	0,73	0,74
Relação $\frac{\text{Pot. mín.}}{\text{Pot. máx.}}$ (r)	0,48	0,46

JULHO



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês: GWh	No fim do mês: % (1)
Paradela	196,1	88,1
Venda Nova	76,9	60,1
Salamonde	24,8	89,9
Caniçada	17,6	53,2
Cabril	140,6	41,4
Castelo do Bode	124,7	76,5
Guilhofrei	5,6	67,5
Lagoa Comprida	26,0 (2)	84,0
Santa Luzia	51,3	83,3
Pracana	4,1	31,8
Póvoa	4,9 (3)	33,7
Total . . .	672,6	64,5

Notas:

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 1,3 GWh armazenados em Vale do Rossim no fim do mês.

(3) Inclui 1,4 GWh armazenados no açude do Poio no fim do mês.

+GF+
Um campo de aplição muito vasto e de multiplas possibilidades de implantação fazem do
carrocel Wheelabrator +GF+
uma máquina universal.
Esta máquina, decapa indiferentemente em condições racionais peças de grandes e pequenas dimensões.
Ela permite igualmente reduzir as despesas de manutenção.
Esta máquina universal está particularmente indicada para as fundições de programa de fabrico heterogéneo.
O rendimento e a rentabilidade das máquinas
Wheelabrator +GF+
mantem-se inigualáveis.
Uma gama de mais de 20 modêlos normais permite fazer face aos problemas mais diversos.
Georges Fischer Sociedade Anónima, Schaffhouse (Suiça)
Telescriptôr: 52915 geofischer schf
Sociedade Comercial ROMAR Lda.
Rua da Boavista, 83-1° D Lisboa
GM 1288/5

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS

SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 93
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

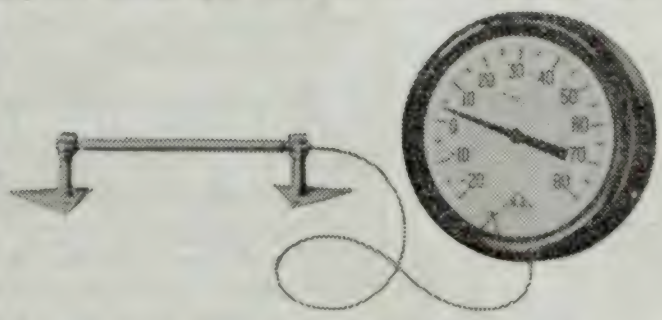
FELTROS, FILTROS E TECIDOS INDUSTRIAIS PARA TODOS OS FINS:

EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS,
DE QUALQUER FIBRA

PASTA PARA PAPEL
PAPEL
FIBROCIMENTO
CURTUMES
FIAÇÕES DE ALGODÃO
LINHAS
INDÚSTRIAS QUÍMICAS

TECELAGENS
ACABAMENTOS
TINTURARIAS
LAVANDARIAS
ESTAMPARIAS
FILTROS
DESPOEIRAGEM

Leituras claras e rigorosas



Termómetros de mostrador para todos os fins industriais com a garantia NEGRETTI & ZAMBRA quanto a precisão e robustez.
À esquerda, um dos novos tipos "Standard" e, à direita, um dos modelos próprios para motores Diesel — apenas dois exemplos de uma larga gama abrangendo centenas de modelos.
Grande variedade de modelos para entrega imediata na fábrica.

NEGRETTI & ZAMBRA

Peça catálogo em Português aos Representantes exclusivos em Portugal e Provincias Ultramarinas:
MARTIN LESLIE & CIA. LDA.
Campo das Cebolas, 43 3.º D.-LISBOA-2
Tel. 3 28 24 e 3 52 34

Sede: NEGRETTI & ZAMBRA LTD.
Regent Street, London W.1

C. D. U. 536

Estabilidade Intrínseca e Condicionada de Sistemas Termoestáticos

PELO ENG.º ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
Prof. do I. S. T.

I) Introdução

A Termoestática trata de sistemas que podem ser completamente definidos por n parâmetros que representam a medida de grandezas estocásticas com distribuições apertadas em torno do valor médio.

À medida que a distribuição se alarga o modelo físico que representa a termoestática deixa de traduzir convenientemente o fenómeno que pretende interpretar.

Esta circunstância exige que o sistema seja estacionário no tempo ou quase-estacionário.

Para sistemas evoluindo ràpidamente no tempo há outros modelos mais apropriados.

Em regime quase-estacionário, os sistemas termoestáticos são completamente definidos por um Ponto num espaço a n dimensões.

É possível ainda definir funções escalares do Ponto representativo do estado do sistema no referencial atrás referido e entre elas há uma que tem particular interesse — a *energia interna* u.

A Termoestática assenta em diversos Postulados que convirá relembrar aqui:

1 — O sistema é definido por n parâmetros fundamentais que gozam de propriedade, de aditividade cada um na sua espécie;

2 — Existe uma função $u(x^1 \ldots x^n)$ — Energia interna — que é uma função contínua dentro de determinados domínios do espaço termoestático e portanto diferenciável que goza também de propriedades da aditividade ou seja a função $u(x^1 \ldots x^n)$ é homogénea de 1.ª ordem dos $x^1 \ldots x^n$;

3 — Na natureza, os sistemas Termoestáticos fechados evoluem no sentido de *minimisar* a função u.

Assim, para verificar se um sistema dado situado em determinado ponto do espaço Termoestático está em equilíbrio estável, instável ou condicionalmente estável, basta verificar se a função u é ou não incondicional ou condicionalmente um mínimo nesse Ponto.

O conhecimento a respeito do equilíbrio e da estabilidade desse equilíbrio é, em Termoestática, o problema central.

Procura-se resolver esta questão com a generalidade e extensão de que é merecedora, nos capítulos que se seguem.

II) Preposição do Problema

II 1) Consideremos um referencial tendo por vectores unitários os vectore $\vec{e}^1 \ldots \vec{e}^n$.

Um ponto do espaço Termoestático será defenido pelo vector $\vec{X}$

$$1)\ \vec{X} = \left(x^1 \vec{e}^1, \ldots, x^n \vec{e}^n\right)$$

O vector $\vec{X}$ será contravariante, pois tem o sentido físico de um *deslocamento* as suas variações — deslocamento do Ponto definidor do estado do sistema.

Pode testar-se a contravariância de $\vec{X}$ pela respectiva fórmula de transformação

$$2)\ x^L = \sum_k \beta^L_k\, x^k$$

e inversamente:

$$3)\ x^K = \sum_L \alpha^k_L\, x^L$$

II 2) As componentes dos vectores $\vec{X}$ gozam da propriedade da aditividade e têm o sentido físico de grandezas, *extensivas* e a cada um dos escalares $x^1 \ldots x^n$ dá-se o nome de propriedade média xtensiva do sistema. Como exemplos podemos fazer referência aos seguintes: Volume, Entropia, Número de moles, etc.

Designaremos $d\vec{X}$ *deslocamento generalizado.*

Finalmente recordamos que o espaço Termoestático é afim e não métrico.

II 3) A circunstância de $u = u\ (x^1 \ldots x^n)$ ser uma função contínua em determinadas regiões do espaço Termoestático permite definir:

$$4)\ du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad \text{numa dessas regiões}$$

ou em linguagem matricial:

$$5)\ du = \left[\frac{\partial u}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial u}{dx^n}\right] \cdot \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ \partial x^n \end{bmatrix}$$

Como du é um escalar, pelos postulados, será $\left[\frac{\partial u}{\partial x^i}\right]$ um vector covariante que designaremos por semelhança com a mecânica, *força generalizada.*

Assim du, variação de energia interna do sistema, significa e é igual ao *trabalho generalizado,* produto interno da força generalizada $\left[\frac{\partial u}{\partial x^i}\right]$ pelo deslocamento generalizado $[dx^i]$.

Vamos adoptar o símbolo $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e nesta simbologia a força generalizada será representada pelo vector covariante $[u_i]$.

Por ter sido postulado que u era uma função homogénea de 1.ª ordem de $x^1 \ldots x^n$ e ainda por serem $x^1 \ldots x^n$ aditivos na respectiva espécie será $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ uma função homogénea de ordem zero de $x^1 \ldots x^n$, isto é, $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ não depende da *extensão* do sistema e não goza da propriedade de aditividade

Pode escrever-se então:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial\ (\lambda u)}{\partial\ (\lambda x^i)} \qquad \text{sendo } \lambda \text{ uma constante.}$$

A estas grandezas cuja homogeneidade é de ordem *zero,* dá-se o nome de propriedades médias *intensivas,* por oposição às *extensivas.*

Como exemplos daremos:

Temperatura $\quad \frac{\partial u}{\partial s}$

Pressão $\quad -\frac{\partial u}{\partial v}$

Potencial químico $\dfrac{\partial u}{\partial n}$

II 4) A partir de d u e por nova diferenciação poderá ser definido o escalar $d^2 u$

$$6)\quad d^2 u = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \, \partial x^i} \, dx^k \, dx^i$$

ou, em linguagem matricial:

$$7)\quad d^2 u = \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^1 \, \partial x^1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^n \, \partial x^1} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^1 \, \partial x^n} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^n \, dx^n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}$$

Simbolisando $\dfrac{\partial^2 u}{dx^i \; dx^k}$ por u_{ik}, a matriz referida em 7) poderá simbolisar-se por $[u_{ik}]$ e representa um tensor duas vezes covariante.

A expressão 7) representa uma forma quadrática e $[u_{ik})$ é simétrica, uma vez que a função u é contínua pois será então

$$8)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \, \partial x^k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \, \partial x^i}$$

As expressões do tipo de 8) dá-se o nome de relações de Maxwell.

II 5) Continuando a diferenciação pode definir-se d^3 u, representado por:

$$9)\quad u_{ikj} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^i \, \partial x^k \, \partial x^j} \quad \text{será:}$$

$$10)\quad d^3 u = \sum_{i=1}^{u} \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{u} \frac{\partial^3 u}{\partial x^i \; \partial x^k \; \partial x^j} \, dx^i \; dx^k \, dx^j$$

ou, em liguagem matricial:

$$11)\quad d^3 = \Big[[dx^i]^t \, [u_{ik.}] \, [dx^i], \ldots, [dx^i]^t \, [u_{ikn}] \, [dx^i] \Big] \times \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}$$

a expressão 11) representa o produto interno de um vector covariante cujos elementos são formas quadráticas, por um vector contravariante $[dx^i]$.

Assim, $[u_{ikj}]$ será um tensor 3 vezes covariante.

II 6) Finalmente, pode representar-se a quarta diferencial de u.

$$12)\quad d^4 u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x^i \, \partial x^k \, \partial x^j \, \partial x^l} \, . \, dx^i \, . \, dx^k \, dx^j \, dx^l \quad \text{e designando por:}$$

$$13)\quad u_{ikjl} = \frac{\partial^4 u}{\partial^i x \; \partial x^k \; \partial x^j \; \partial x^l} \quad \text{será ainda:}$$

$$14)\quad d^4 u = \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix} \overset{t}{\times} \begin{bmatrix} [dx^i]^t\,[u_{ik\,l}]\,[dx^i] & \cdots\cdots & [dx^i]^t\,[u_{ik\,ln}]\,[dx^i] \\ \vdots & & \\ [dx^i]^t\,[u_{iknl}]\,[dx^i] & \cdots\cdots & [dx^i]^t\,[u_{iknn}]\,[dx^i] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}$$

A expressão 14) representa uma forma quadrática onde os elementos de matriz são por sua vez formas quadráticas e como tal são escalares.
$[u_{ikjl}]$ representa um tensor 4 vezes covariante.

III) Determinação das expressões de du, d^2u, d^3u e d^4u, quando o vector deslocamento está sujeito a condições impostas pelo universo exterior ao sistema

III 1) *Introdução*

Este capítulo é destinado à dedução do formulário correspondente a sistemas sujeitos a condições exteriores e é necessário para o estudo de sistemas em equilíbrio ou estabilidade condicionadas.

A dedução é feita exigindo apenas continuidade para a função u e portanto é válido dum modo geral para funções contínuas.

Assim o postulado de termoestática que exige que função u seja homogénea de 1.ª ordem não intervém nas deduções que se vão fazer, nem tão pouco nas que foram feitas no Capítulo II.

III 2) *Condições exteriores ao sistema*

A função $u = u\,(x^1 \ldots x^n)$ é contínua na região em estudo.
Admitamos que as variáveis $x^1 \ldots x^n$ estão sujeitas a determinadas condições :

$$15)\quad \begin{cases} c^1\,(x^1 \ldots\ldots x^n) = 0 \\ \vdots \\ c^k\,(x^1 \ldots\ldots x^n) = 0 \end{cases} \qquad \text{sendo } k \leqslant n$$

As funções c^k são contínuas na região em estudo e portanto diferenciáveis. Seja,

$$16)\quad c^j_i = \frac{\partial c^j}{\partial x^i} \qquad \begin{cases} j = 1 \ldots\ldots k \\ i = 1 \ldots\ldots n \end{cases}$$

e tendo em vista que $\quad dc^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial c^j}{\partial x^i}\, dx^i = 0$

$$j = 1 \ldots\ldots k$$

Será ainda

$$17)\quad \begin{bmatrix} c^1_1 & \cdots\cdots & c^1_n \\ c^k_1 & \cdots\cdots & c^k_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx_n \end{bmatrix} = 0$$

A matriz $[c^j_i]$ será frequentemente representada pela simbologia usada na representação de Jacobianos ou seja $\dfrac{\partial\,(c^1 \ldots\ldots c^k)}{\partial\,(x^1 \ldots\ldots c^k)} = [c^j_i]$.

Vamos admitir ainda que a *ordem* da matriz $[c^i_j]$ é k.
Haverá pois um ou mais determinantes de k ordem formados a partir da matriz não nulos.

$$18)\quad \det \frac{\partial\,(c^1 \ldots\ldots\ldots c^k)}{\partial\,(x^1 \ldots\ldots\ldots x^k)} \neq 0$$

Tendo em vista 18), será possível exprimir $dx^1 \ldots\ldots dx^k$ em função de $dx^{k+1} \ldots\ldots dx^n$.
Para aligeirar a simbologia vamos representar:

$$dx^I = \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^k \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad dx^{II} = \begin{bmatrix} dx^{k-1} \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}$$

de 17) e usando a simbologia apresentada poder-se-á escrever:

$$\frac{\partial\,(c^1 \ldots c^k)}{\partial\,(x^1 \ldots x^k)} \cdot dx^I + \frac{\partial\,(c^1 \ldots c^k)}{\partial\,(x^{k+1} \ldots x^n)}\, dx^{II} = 0 \qquad \text{ou}$$

$$19)\quad dx^I = -\frac{\partial\,(x^1 \ldots x^k)}{\partial\,(c^1 \ldots c^k)} \times \frac{\partial\,(c^1 \ldots c^k)}{\partial\,(x^{k+1} \ldots x^n)} \cdot dx^{II}$$

Designando por:

$$20)\quad [\alpha^i_j] = -\frac{\partial\,(x^1 \ldots x^k)}{\partial\,(c^1 \ldots c^k)} \cdot \frac{\partial\,(c^1 \ldots c^k)}{\partial\,(x^{k+1} \ldots x^n)} = \underset{(k\,,\,p)}{\begin{bmatrix} \alpha^1_1 \ldots\ldots \alpha^1_p \\ \alpha^k_1 \ldots\ldots \alpha^n_p \end{bmatrix}}$$

sendo $\qquad p = n - k$

ou finalmente $\qquad dx^I = \alpha\, dx^{II} \quad 21)$

III 3) *Cálculo de d u condicionado:*

$$22)\quad du = \frac{\partial\,(u)}{\partial\,(x^I, x^{II})} \cdot \begin{bmatrix} dx^I \\ dx^{II} \end{bmatrix} = \frac{\partial\,(u)}{\partial\,(x^I)} \cdot dx^I + \frac{\partial\,(u)}{\partial\,x(^{II})} \cdot dx^{II}$$

Substituindo em 22) o valor de x^I tirado de 21) obtemos:

$$23)\quad du = \underset{(1\,,\,k)\,.\,(k\,,\,p)}{\left(\frac{\partial u}{dx^I} \cdot \alpha} + \underset{(1\,,\,p)\,(p\,,\,1)}{\frac{\partial u}{\partial x^{II}}\right)} dx^{II}$$

Como era de prever na expressão de du só intervêm como variáveis independentes dx^{II}.

III 4) *Cálculo de $d^2 u$ condicionado*

Convém ter em atenção que, em geral, $\frac{\partial u}{\partial x^I}$, α, $\frac{\partial u}{dx^{II}}$ são funções de $x^1 \ldots\ldots x^n$ embora só $x^{k+1} \ldots\ldots x^n$ sejam variáveis independentes.
Por outro lado pode escrever-se 23) transpondo os vectores no produto e será:

$$24)\quad du = \left(dx^{II}\right)^t \left(\alpha^t \left(\frac{\partial u}{\partial x^I}\right)^t + \left(\frac{\partial u}{\partial x^{II}}\right)^t\right)$$

e diferenciando 24) obtemos:

$$25)\quad d^2 u = \left(d x^{II}\right)^t \left\{ \left(\frac{\partial \alpha^t}{\partial x^I} \cdot d x^I + \frac{d \alpha^t}{d x^{II}} \cdot d x^{II} \right) \cdot \left(\frac{d u}{d x^I} \right)^t + \right.$$

$$+ \alpha^t \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x^I} \right)^t}{\partial x^I} \cdot d x^I + \frac{\partial \left(\frac{d u}{\partial x^{II}} \right)^t}{d x^{II}} \cdot d x^{II} \right) +$$

$$\left. + \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x^{II}} \right)^t}{\partial x^I} \cdot d x^I + \frac{\partial \left(\frac{d u}{\partial x^{II}} \right)^t}{\partial x^{II}} \cdot d x^{II} \right\}$$

mas:

a)

$$\frac{\partial \alpha^t}{\partial x^I} d x^I = \underset{(p\,,\,k)}{\begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha^1_1}{\partial x^I} \cdot d x^I \ldots\ldots \frac{\partial \alpha^k_1}{d x^I} d x^I \\ \\ \frac{\partial \alpha^1_p}{d x^I} \cdot d x^I \ldots\ldots \frac{\partial \alpha^k_p}{\partial x^I} d x^I \end{bmatrix}} + \ldots\ldots + \underset{(p\,,\,k)}{\begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha^1_1}{\partial x^k} \cdot d x^k \ldots\ldots \frac{\partial \alpha^k_1}{\partial x^k} \cdot d x^k \\ \\ \frac{\partial \alpha^1_p}{\partial x^k} \cdot d x^k \ldots\ldots \frac{\partial \alpha^k_p}{\partial x^k} \cdot d x^k \end{bmatrix}}$$

e

$$\underset{(p\,,\,k)}{\frac{\partial \alpha^t}{\partial x^I} d x^I} \cdot \underset{(k\,,\,1)}{\left(\frac{\partial u}{d x^I} \right)^t} = \underset{(p\,,\,1)}{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha^i_1}{\partial x^I} \cdot \frac{d u}{\partial x^i} d x^I \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha^i_p}{\partial x^I} \cdot \frac{d u}{d x^i} d x^I \end{bmatrix}} + \ldots\ldots + \underset{(p\,,\,1)}{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha^i_1}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i} \cdot d x^k \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha^i_p}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i} \cdot d x^k \end{bmatrix}}$$

$$= \underset{(p\,,\,k)}{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha^i_1}{\partial x^I} \cdot \frac{\partial u}{d x^i} \ldots\ldots \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha^i_1}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha^i p}{\partial x^I} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i} \ldots\ldots \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha^i p}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i} \end{bmatrix}} \times \underset{(k\,,\,1)}{\begin{bmatrix} d x^I \\ \vdots \\ d x^k \end{bmatrix}}$$

e designando por:

$$26)\quad \beta e j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha^i_e}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial u}{d x^i} \qquad \begin{matrix} j = 1 \ldots\ldots k \\ e = 1 \ldots\ldots p \end{matrix}$$

$$= \left[\frac{\partial \alpha^1_e}{\partial x^j}, \ldots\ldots, \frac{\partial \alpha^k_e}{\partial x^j} \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x^I} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x^k} \end{bmatrix}$$

Será finalmente:

$$\frac{\partial \alpha^t}{\partial x^I} \cdot d x^I \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x^t} \right) = \underset{(p\,,\,k)\ (k\,,\,1)}{\left[\beta e j \right]} \cdot d x^I \qquad \begin{cases} e = 1 \ldots\ldots p \\ j = 1 \ldots\ldots k \end{cases}$$

mas tendo em vista 21) será ainda:

$$27)\quad \frac{\partial \alpha^t}{\partial x^I} \cdot dx^I \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x^I}\right)^t = \left[\beta e j\right] \times \alpha \times dx^{II}$$

Dum modo idêntico será:

$$b)\quad 28)\quad \frac{d\alpha^t}{\partial x^{II}} \cdot dx^{II} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x^I}\right)^t = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_1^i}{\partial x^{k+1}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_1^i}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i} \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_p^i}{\partial x^{k+1}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_p^i}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dx^{k+1} \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}$$

$$= [\gamma_{e.j}] \times dx^{II} \qquad e = 1 \ldots\ldots p \qquad j = 1 \ldots\ldots p$$

c) Tem interesse também determinar a forma das derivadas de $\left[\frac{\partial u}{\partial x^i}\right]$.

Assim teremos:

$$29)\quad \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x^I}\right)^t}{\partial x^I} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^I\, \partial x^I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^1\, \partial x^1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x^k\, \partial x^1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^1\, \partial x^k} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x^k\, \partial x^k} \end{bmatrix} = \underset{(k,\,k)}{u_{I,I} = u_a}$$

$$30)\quad \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x^I}\right)^t}{\partial x^{II}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^{II}\, \partial x^I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^{k+1}\, \partial x^1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x^n\, \partial x^1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^{k+1}\, \partial x^k} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x^n\, \partial x^k} \end{bmatrix} = \underset{(k,\,p)}{u_{I,II} = u_b}$$

$$31)\quad \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x^{II}}\right)^t}{\partial x^I} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^I\, \partial x^{II}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^1\, \partial x^{k+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x^k\, \partial x^{k+1}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^1\, \partial x^n} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x^k\, \partial x^n} \end{bmatrix} = \underset{(p,\,k)}{u_{II,I} = u_c}$$

$$32)\quad \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x^{II}}\right)^t}{\partial x^{II}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^{II}\, \partial x^{II}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_2 u}{\partial x^{k+1}\, \partial x^{k+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x^n\, \partial x^{k+1}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^{k+1}\, \partial x^n} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x^n\, \partial x^n} \end{bmatrix} = \underset{(p,\,p)}{u_{I,II} = u_d}$$

Donde

$$33)\quad [u_{ik}] = \begin{bmatrix} \underset{(k,\,k)}{u_a} & \vdots & \underset{(k,\,p)}{u_b} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \underset{(p,\,k)}{u_c} & \vdots & \underset{(p,\,p)}{u_d} \end{bmatrix}$$

Substituindo em 25) as expressões 27), 28), 29), 30), 31) e 32) obtemos:

$$34)\quad d^2 u = (d x^{II})^t \left[\underset{(p\,,\,p)}{(\beta\alpha + \gamma)} + \underset{(p\,,\,p)}{(\alpha^t \,.\, u_a \,.\, \alpha)} + \underset{(p\,,\,p)}{(\alpha^t \,.\, u_b)} + \underset{(p\,,\,p)}{(u_c \,.\, \alpha)} + \underset{(p\,.\,p)}{u_d} \right] . \, d x^{II}$$

Podemos representar a soma de matrizes (p , p) entre chavetas, por $[W_{ij}$ e 34) poderá escrever-se:

$$35)\quad d^2 u = (d x^{II})^t \,.\, [W_{ij}] \,.\, d x^{II}$$

III 5) *Cálculo de $d^3 u$ condicionado*

Designando $d^2 u$ por $(d x^{II})^t \, [W_{ij}] \, d x^{II}$ onde i e j variam de 1 ..... p e $p = n - k$, a terceira diferencial de u será:

$$36)\quad d^3 u = \frac{\partial}{\partial x^1} \left((d x^{II})^t \, [W_{ij}] \, d x^{II} \right) . \, d x^1 + \ldots\ldots + \frac{\partial}{\partial x^n} \left((d x^{II})^t \, [W_{ij}] \, d x^{II} \right) d x^n$$

e designando por: $\quad [W_{sij}] = \dfrac{\partial}{\partial x_s} \times [W_{ij}]$

será: $\quad s = 1 \ldots\ldots n$

$$37)\quad d^3 u = \left[\left\{ d x^{II})^t \, [W_{1ij}] \, d x^{II} \right\} , \ldots\ldots , \left\{ (d x^{II})^t \, [W_{nij}] \, d x^{II} \right\} \right] \times \begin{bmatrix} d x^1 \\ \vdots \\ d x^n \end{bmatrix}$$

Para aligeirar a escrita vamos representar por:

$$38)\quad \begin{cases} \underset{(1\,,\,k)}{W_s^I} = \left[\left\{ (d x^{II})^t \, [W_{1ij}] \, d x^{II} \right\} , \ldots\ldots , \left\{ (d x^{II})^t \, [W_{kij}] \, d x^{II} \right\} \right] \\ \underset{(1\,,\,p)}{W_s^{II}} = \left[\left\{ (d x^{II})^t \, [W_{(k+1)ij}] \, d x^{II} \right\} , \ldots\ldots , \left\{ (d x^{II})^t \, [W_{nij}] \, d x^{II} \right\} \right] \end{cases}$$

Substituindo 38) em 37 será:

$$39)\quad d^3 u = \left[W_s^I \,,\, W_s^{II} \right] \times \begin{bmatrix} d x^I \\ d x^{II} \end{bmatrix} = W_s^I \,.\, d x^I + W_s^{II} \, d x^{II}$$

e tendo em vista 21), teremos finalmente

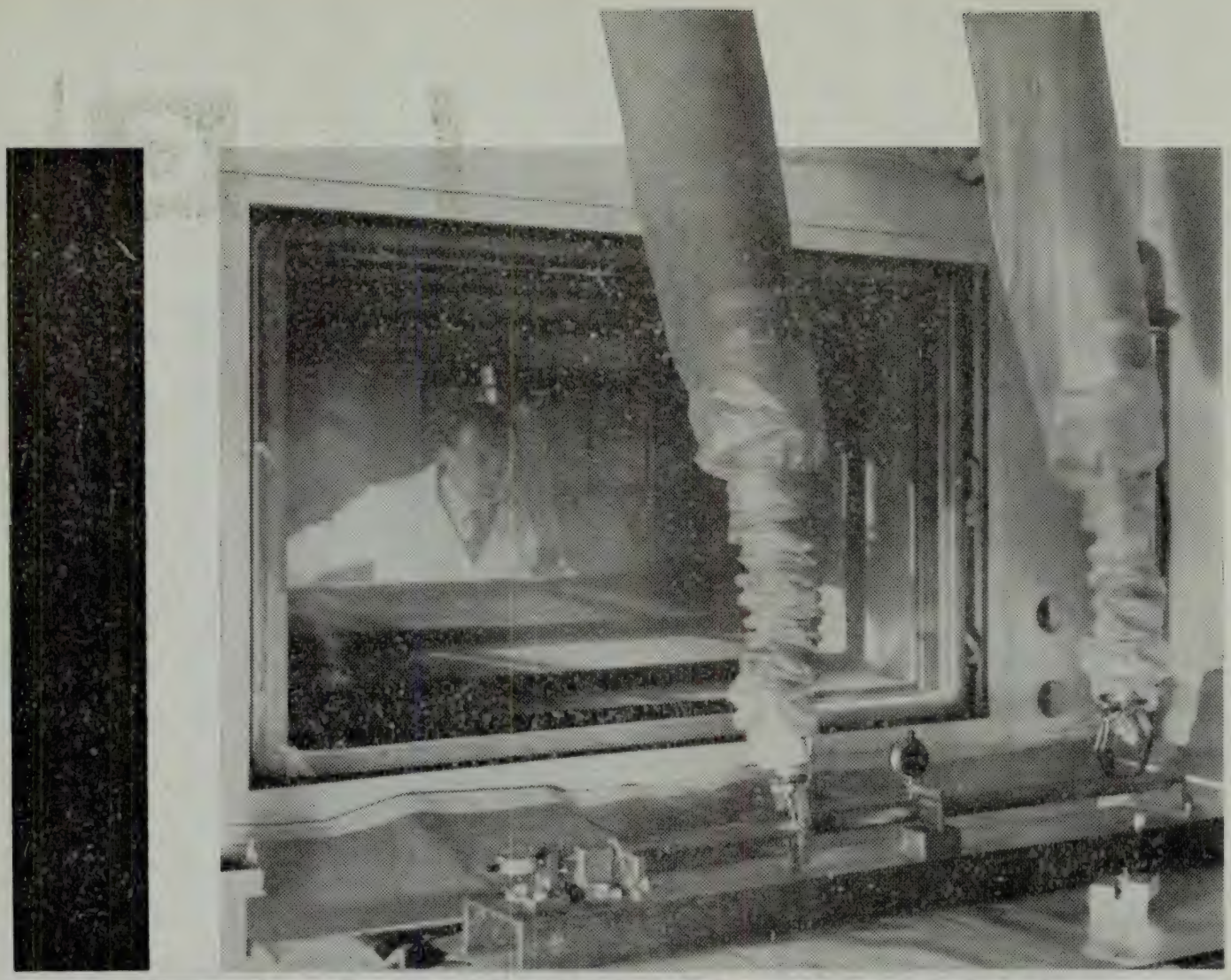
$$40)\quad d^3 u = \Big(\underset{(1,k)}{W_s^I} \;.\; \underset{(k,p)}{\alpha} + \underset{(1,p)}{W_s^{II}} \Big) \;.\; \underset{(p,1)}{d x^{II}}$$

$$41)\quad = (d x^{II})^t \,.\, \left((W_s^{II})^t + \alpha^t \,.\, (W_s^I)^t \right)$$

III 6) *Cálculo de $d^4 u$ condicionado*

Diferenciando $d^3 u$ obtemos:

$$42)\quad d^4 u = (d x^{II})^t \,.\, \left\{ d \alpha^t \,.\, (W_s^I)^t + \alpha^t \,.\, d\,(W_s^I)^t + d\,(W_s^{II})^t \right\}$$



demasiadamente quente para usar as mãos!

...mas não para aquelas «mãos» quase humanas nos movimentos e sensibilidade. A SHELL, com a sua série de lubrificantes APL — a única no mercado resistente a radiações atómicas — veio resolver os problemas de lubrificação destes e doutros mecanismos indispensáveis à moderna ciência, marcando mais uma vez a sua posição na vanguarda do progresso.

SHELL

LUBRIFICANTES INDUSTRIAIS

SHELL PORTUGUESA, S.A.R.L.

Diga-me o que pensa àcerca disto M.

C

BOLETIM DAS VÁLVULAS CRANE DE CORREDIÇA EM FERRO FUNDIDO DE APERTO POR GRAMPO.

... com fuso ascendente, rosca interior e cunha de disco.

Esta série de válvulas é particularmente recomendada para condutas que levem quantidades consideráveis de sujidade e outras substâncias estranhas. A sua construção de aperto por grampo permite que sejam rápida e fàcilmente desmontadas, para limpar ou consertar. São compactas e leves. A cunha está ligada ao fuso por meio de uma ranhura em T, vantagem esta que permite uma ligação segura mas flexível.

As válvulas com interiores de bronze são recomendadas para vapor, água, ar e conductas de óleos não corrosivos. As válvulas só de ferro são recomendadas para óleo, gás ou outros fluídos, que corroem o bronze, mas não o ferro o aço. Válvulas roscadas ou com flanges são fornecidas de acordo com as normas Britânicas ou Americanas.

Dimensões : roscadas — 1/2" a 4"
com flanges — 1" a 4"

CRANE

VÁLVULAS EM BRONZE FERRO FUNDIDO E AÇO.

Crane, Ltd., 15/16. Red Lion Court, Fleet Street, LONDON, E.C.4. England.

Agentes: R.E.B.E.L. R. Joaquim António de Aguiar, 45—LISBOA 1.

a) *Cálculo de* $d\alpha^t \cdot (W_s^I)^t$

$$d\alpha^t = \frac{\partial \alpha^t}{\partial x^I} \cdot dx^I + \frac{\partial \alpha^t}{\partial x^{II}} \cdot dx^{II}$$

e tendo em vista a forma como foi deduzida a expressão de

$$\frac{\partial \alpha^t}{\partial x^I} dx^I \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x^I}\right)^t \quad \text{e} \quad \frac{\partial \alpha^t}{\partial x} \cdot dx^{II} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x^I}\right)^t$$

no Capítulo III 4) alínea *a*) e *b*).

Poderá escrever-se, desde logo:

$$43) \quad d\alpha^t \cdot (W_s^I)^t = (B \cdot \alpha + D) \cdot dx^{II}$$

sendo:

$$44) \quad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_1^I}{\partial x^i} \cdot W_i \ \ldots\ldots \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_1^I}{\partial x^k} \cdot W_i \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_p^I}{\partial x^i} \cdot W_i \ \ldots\ldots \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_1^I}{\partial x^{II}} \cdot W_i \end{bmatrix}$$

$$45) \quad D = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_1^I}{\partial x^{k+1}} \cdot W_i \ \ldots\ldots \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_1^I}{\partial x^{II}} \cdot W_i \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_p^I}{\partial x^{k+1}} \cdot W_i \ \ldots\ldots \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \alpha_1^I}{\partial x^{II}} \cdot W_i \end{bmatrix}$$

b) *Cálculo de* $d\,(W_s^I)^t$ *e* $d\,(W_s^{II})^t$

Tendo em vista o modo de proceder do Cap. III 4) c). Será:

$$46) \quad d\,(W_s^I)^t = \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^I\, \partial x^I} \cdot \alpha \cdot dx^{II} + \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^{II}\, \partial x^I} \cdot dx^{II}$$

e

$$47) \quad d\,(W_s^{II})^t = \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^I\, \partial x^{II}} \cdot \alpha \cdot dx^{II} + \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^{II}\, \partial x^I} \cdot dx^{II}$$

Substituindo 43), 46) e 47) em 42) obtemos finalmente:

$$48) \quad d^4 u = (dx^{II})^t \left\{ (B\alpha + D) + (dx^{II})^t \left(\alpha^t \cdot \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^I\, \partial x^I} \cdot \alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha^t \cdot \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^{II}\, \partial x^I} + \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^I\, \partial x^{II}} \cdot \alpha + \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^{II}\, \partial x^{II}} \right) dx^{II} \right\} dx^{II}$$

A principal simplificação a introduzir na expressão 48) será a que resulta da matriz dos $\alpha\alpha$ ser linear.

Daqui resultam duas simplificações:

A eliminação de B e D

A matriz $[W_{ij}]$ passa a tomar a forma mais simples $[W_{ij}] = \alpha^t u_a \alpha + \alpha^t u_b + u_c \alpha + u_d$

A expressão 48) poderá representar-se então por:

$$49 \quad d^4 u = (d x^{II})^t \left\{ \underset{(p,k)}{\alpha^t} \underset{(k,k)}{[M_{II}]} \underset{(k,p)}{\alpha} + \underset{(p,k)}{\alpha^t} \underset{(k,p)}{[M_{I\,II}]} + \underset{(p,k)}{[M_{II\,I}]} \cdot \underset{(k,p)}{\alpha} + \underset{(p,p)}{[M_{II\,II}]} \right\} d x^{II}$$

Sendo:

a)

$$[M_{II}] = \begin{bmatrix} M_{11} \ldots\ldots M_{1k} \\ \\ M^{k1} \ldots\ldots M_{kk} \end{bmatrix} = [M_{ij}] \quad \begin{cases} i = 1 \ldots\ldots k \\ j = 1 \ldots\ldots k \end{cases}$$

e

$$50) \quad M_{ij} = (d x^{II})^t \left(\underset{(p,k)}{\alpha^t} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^I \underbrace{\partial x^{II}}_{(k,k)} \partial x^i \partial x^j} \right] \underset{(k,p)}{\alpha} + \underset{(p,k)}{\alpha^t} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^I \underbrace{\partial x^{II}}_{(k,p)} d x^i d x^j} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{d^4 u}{\underbrace{\partial x^{II} \partial x^I}_{(p,k)} d x^i d x^j} \right] \times \underset{(k,p)}{\alpha} + \left[\frac{\partial^4 u}{\underbrace{\partial x^{II} \partial x^{II}}_{(p,p)} \partial x^i d x^j} \right] \right) \times d x^{II}$$

$$\begin{cases} i = 1 \ldots\ldots k \\ j = 1 \ldots\ldots k \end{cases}$$

Identìcamente será:

b) $[M_{I\,II}] = [M_{ij}] \quad \begin{cases} i = 1 \ldots\ldots k \\ j = k+1 \ldots n \end{cases}$

$$51) \quad e \quad M_{ij} = (d x^{II})^t \left(\alpha^t \cdot \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^I \underbrace{\partial x^I}_{} \partial x^i \partial x^j} \right] \alpha + \alpha^t \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^I \partial x^{II} \partial x^i \partial x^j} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^{II} \partial x^I \partial x^i \partial x^j} \right] \cdot \alpha + \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^{II} \partial x^{II} \partial x^i \partial x^j} \right] \right) d x^{II}$$

c) $[M_{II\,I}] = [M_{ij}] \quad \begin{cases} i = k+1 \ldots n \\ j = 1 \ldots\ldots k \end{cases}$

$$52) \quad e \quad M_{ij} = (d x^{II})^t \left(\alpha^t \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^I \partial^I \partial x^i \partial x^j} \right] \alpha + \alpha^t \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^I \partial x^{II} \partial x^i \partial x^j} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^{II} \partial x^I \partial x^i \partial x^j} \right] \cdot \alpha + \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^{II} \partial x^{II} \partial x^i \partial x^j} \right] \right) d x^{II}$$

d) $[M^{II\,II}] = (M^{ij}) \quad \begin{cases} i = k+1 \ldots n \\ j = k+1 \ldots n \end{cases}$

$$53) \quad e \quad M^{ij} = (d x^{II})^t \left(\alpha^t \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^I \partial x^I \partial x^i \partial x^j} \right] \alpha + \alpha^t \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^I \partial x^{II} \partial x^i \partial x^j} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^{II} \partial x^I \partial x^i \partial x^j} \right] \cdot \alpha + \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^{II} \partial x^{II} \partial x^i \partial x^j} \right] \right) d x^{II}$$

Aqui se dá por terminada a dedução do formulário mais importante para a discussão da estabilidade dos sistemas termodinâmicos.

IV) Problema do equilíbrio e estabilidade de Sistemas Termoestáticos

IV 1) *Introdução*

Apresentado no capítulo antecedente algum formulário que interesse à discussão do problema do equilíbrio e estabilidade, cabe agora apresentar os conceitos básicos.

Seja dado um sistema A e consideremos um sistema a de A, com uma extensão muito menor.

A ordem de grandeza do sub-sistema a será suficientemente pequena para poderem desprezar-se os efeitos energéticos de a em A de ordem superior à primeira.

Tendo sido escolhido, ao *acaso*, o sub-sistema a, as conclusões a que se chegarem podem generalisar-se a todo o sistema A.

Estando o sistema A isolado do universo exterior, procura-se conhecer do *equilíbrio* e de *estabilidade* desse equilíbrio do sistema A, verificando se o sub-sistema a está ou não em equilíbrio e se este é ou não estável, em relação ao sub-sistema A-a.

Para caracterizar um sub-sistema a dentro do sistema A é necessário definir-lhe um domínio o que pode realizar-se tomando um parâmetro extensivo para referência e fixar a extensão de a e de A-a medidas por esse parâmetro.

Pode até fixar-se apenas uma relação entre vários parâmetros extensivos que permite definir um qualquer deles em relação aos restantes.

Sob o ponto de vista formal este esclarecimento podia ser dispensado, mas para bem interpretar o facto Termoestático, a ausência de uma referência a esta dificuldade esvazearia de conteúdo a operação de *diferenciação* de um sub-sistema a dentro de um sistema A ou a do isolamento de A do restante universo.

IV 2) *Definição do sistema* A *e* a

Seja dado um sistema A descritível completamente num espaço Termoestático de $n+1$ variáveis extensivas independentes: $(X^o \dots X^n)$ e seja X^o a variável escolhida para definir a extensão de a.

Como o sistema A está isolado em relação ao Universo, todas as variáveis extensivas de A são constantes.

$$54)\quad \begin{cases} X^i_A = \text{Const} \\ d\,X^i_A = 0 \end{cases} \qquad i = (0, \dots n)$$

No sistema A isolemos o sub-sistema a e seja X^o_a a extensão de X^o de a que se admite constante por hipótese de isolamento de a em A.

Então haverá, para os sistemas a e A-a, as seguintes relações:

$$55)\quad \begin{cases} x^i_a = \dfrac{X^i_a}{X^o_a} & i = 1 \dots n \\ u_a = \dfrac{U_a}{X^o_a} & \text{(energia interna do sistema } a\text{, que é uma função homogénea de ordem 1).} \end{cases}$$

e

$$56)\quad \begin{cases} x^i_{A\text{-}a} = \dfrac{X^i_{A\text{-}a}}{X^o_{A\text{-}a}} & i = 1 \dots n \\ u_{A\text{-}a} = \dfrac{U_{A\text{-}a}}{X^o_{A\text{-}a}} \end{cases}$$

Às variáveis extensivas x^i, u, dá-se o nome genérico de *variáveis específicas* pois representam o valor do parâmetro ou grandeza considerada por unidade de extensão do parâmetro X^o tomado para medida da extensão do sistema.

Normalmente X^o é escolhido entre as variáveis que têm a natureza de uma *massa* (moles de um determinado componente ou a soma das moles de um conjunto de componentes presentes, etc.).

Posto isto, e tendo em vista a aditividade da energia interna, poderá escrever-se:

$$57)\quad \begin{cases} U_A = U_{A-a} + U_a \\ \Delta U_A = \Delta U_{A-a} + \Delta U_a \end{cases}$$

e desenvolvendo em série de Taylor (as funções u são contínuas e portanto deriváveis até qualquer ordem dentro da região do espaço Termoestático que contém o ponto considerado), obtemos:

$$58)\quad \begin{cases} \Delta U_A = dU_A + \frac{1}{2!} d^2U_A + \frac{1}{3!} d^3U_A + \frac{1}{4!} d^4U_A + \dots \\ \Delta U_{A-a} = dU_{A-a} + \frac{1}{2!} d^2U_{A-a} + \dots \\ \Delta U_a = dU_a + \frac{1}{2!} d^2U_a + \dots \end{cases}$$

Mas como a extensão de *a* era muito pequena em relação a *A-a*, admitimos por hipótese que as perturbacões energéticas em *A-a*, resultantes de *a*, eram desprezáveis a partir da 1.ª ordem, donde resulta que pode escrever-se

$$59)\quad \begin{cases} \Delta U_A = dU_A + \frac{1}{2!} d^2U_A + \dots \\ \Delta U_{A-a} = dU_{A-a} \\ \Delta U_a = dU_a + \frac{1}{2} d^2U_a + \dots \end{cases}$$

ou

$$60)\quad \begin{cases} \Delta U_A = \Delta U_{A-a} + \Delta U_a = dU_{A-a} + dU_a + \frac{1}{2!} d^2U_a + \dots \\ \qquad = X^o_{A-a}\, du_{A-a} + X^o_a\, du_a + X^o_a\, d^2u_a + X^o_a\, d^3u_a + \dots \end{cases}$$

e ainda:

$$61)\quad \begin{cases} du_A = X^o_{A-a}\, du_{A-a} + X^o_a\, du_a \\ d^2u_A = X^o_a \quad d^2u_a \\ d^3u_A = X^o_a \quad d^3u_a \\ d^4u_A = X^o_a \quad d^4u_a \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

IV 3) *Conceito de equilíbrio e estabilidade*

É postulado fundamental de termoestática que a energia *u* dum sistema A isolado tende para um *mínimo*.

Com esta simples afirmação permissial transforma-se o problema do equilíbrio e estabilidade num simples problema de máximos e mínimos condicionados.

Se $u = u(x^1 \ldots\ldots x^n)$ for uma função qualquer contínua na região do espaço em estudo, estando as variáveis $x^1 \ldots\ldots x^n$ sujeitas a um sistema de $k \leqslant n$ funções contínuas nessa mesma região, com a forma

$$62) \quad \begin{cases} c^1 (x^1 \ldots\ldots x^n) = 0 \\ \vdots \\ c^k (x^1 \ldots\ldots x^n) = 0 \end{cases}$$

o problema do equilíbrio e estabilidade resume-se a verificar se *u* é *mínimo* no ponto considerado sujeitando o sistema a deslocamentos virtuais condicionados à satisfação do sistema 62).

A primeira condição, para que *u* seja mínimo num ponto, é ser $d\,u = 0$ para deslocamentos virtuais condicionadas a 62).

Esta primeira condição é *necessária* mas não suficiente e impõe a estacionaridade da função *u* no ponto ou seja o *equilíbrio* do sistema A nesse ponto.

Verificada essa condição há que estudar $d^2 u$ e ver ser $d^2 u > 0$, *condição suficiente* para que *u* seja *mínimo* e o equilíbrio do sistema seja *estável.*

Se $d^2 u$ não for positivo para os deslocamentos virtuais compatíveis com 62), então o sistema não tem um equilíbrio estável, a não ser que $d^2 u = 0$ e haverá, nessa hipótese que estudar derivadas de ordem superior.

Esta matéria é clássica e só interessa por isso estudar aqui as aplicações à termoestática, o que se fará nos capítulos seguintes.

V — Equilíbrio

VI) *Equilíbrio não condicionado*

O sistema *A* para que esteja em equilíbrio será *necessário* (mas não suficiente) que $d\,U_A = 0$ mas de 61) sabe-se que:

$$63) \quad \begin{aligned} d\,U_A &= X^o_{A\text{-}a}\, d\,u_{A\text{-}a} + X^o_a\, d\,u_a \\ &= X^o_{A\text{-}a} \sum_{i=1}^{u} \frac{\partial u_{A\text{-}a}}{\partial x^i_{A\text{-}a}}\, d\,x^i_{A\text{-}a} + X^o_a \sum_{i=1}^{u} \frac{\partial u_a}{\partial x^i_a} \cdot d\,x^i_a \\ &= \sum_{i=1}^{u} \frac{\partial u_{A\text{-}a}}{\partial x^i_{A\text{-}a}} \cdot d\,X^i_{A\text{-}a} + \sum_{i=1}^{u} \frac{\partial u_a}{\partial x^i_a} \cdot d\,X^i_a \end{aligned}$$

mas tendo em vista 54) será ainda:

$$64) \quad 0 = d\,X^i_A = d\,X^i_{A\text{-}a} + d\,X^i_a \qquad i = 1, \ldots n$$

e substituindo 64 em 63) temos:

$$65) \quad 0 = \sum_{i=1}^{u} \left(\frac{\partial u_{A\text{-}a}}{\partial x_A^{i\text{-}a}} - \frac{\partial u_a}{\partial x^i_a} \right) \cdot d\,x^i_a$$

e para que esta equação seja satisfeita qualquer que seja $d\,X^i_a$, $i = 1, \ldots n$, será finalmente:

$$66) \quad \frac{\partial u_{A-a}}{\partial x^i_{A-a}} = \frac{d\,u_a}{d\,x^i_a} \qquad i = 1, \ldots\ldots n$$

ou em linguagem matricial:

$$67)\quad \left[\frac{\partial u_{A-a}}{\partial x^i_{A-a}}\right] = \left[\frac{\partial u_a}{\partial x^i_a}\right] \qquad \text{ou} \qquad \left[{}_{A-a}u^i\right] = \left[{}_a u^i\right]$$

que significa que os vectores das *forças generalizadas* dos sistemas $A-a$ e a têm de ser iguais.

Daqui resulta que os respectivos trabalhos virtuais são iguais e de sinais contrários e portanto a sua soma é nula e portanto não se altera o valor de energia interna do sistema A ($dU_a = 0$).

O sistema de equações 66) pode interpretar-se representando x^i várias grandezas.

$x^i = s$ (entropia) será $\frac{\partial u}{\partial s} = T$ (temperatura) e a condição de equilíbrio impõe que $T_{A-a} = T_a$

$x^i = v$ (volume) será $\frac{\partial u}{\partial v} = -P$ (Pressão) e a condição e equilíbrio impõe que $P_{A-a} = P_a$

$x^i = n$ (Número de moles) será $\frac{\partial u}{\partial n}\ \mu$ (Potencial químico) e novamente será $\mu_{A-a} = \mu_a$

Estas igualdades são muito conhecidas em Termoestática.

V 2) *Equilíbrio condicionado*

Admitamos que o vector deslocamento está sujeito a k condições da forma 62).
Em 23) já vimos que:

$$68)\quad du = \left(\frac{\partial u}{\partial x^I}\cdot\alpha + \frac{\partial u}{\partial x^{II}}\right)\cdot\partial x^{II}$$
$$= (u_I\ .\ \alpha + u_{II})\ .\ dx^{II}$$

Tem interesse estudar alguns casos particulares:

a) As condições $c^k = 0$ são lineares em x^I, então α é uma matriz de termos constantes.

b) Se $c^k = 0$ além de linear, verifica-se ainda que $\frac{\partial\,(c^1 \ldots\ldots c^k)}{\partial\,(x^1 \ldots\ldots x^k)}$ é quadrado (k, k) e

$$\det\frac{\partial\,(c^1 \ldots\ldots c^k)}{\partial\,(x^1 \ldots\ldots x^k)} \neq 0 \quad \text{então será:} \quad \frac{\partial\,(c^1 \ldots\ldots c^k)}{\partial\,(x^1 \ldots\ldots x^k)}\cdot\begin{bmatrix} dx^I \\ dx^k\end{bmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} dx^I \\ dx^k\end{bmatrix} = 0$$

donde $\alpha = 0$ e a expressão de du reduz-se a:

$$69)\quad du = u_{II}\ .\ dx^{II} = 0$$

Este resultado significa que se alguns parâmetros extensivos forem *constantes* ($dx^I = 0$), então basta impor que o trabalho das restantes forças generalizadas u_{II} seja nulo.

c) *Não existem condições $c^k = 0$*

Então o problema degenera no do equilíbrio não condicionado, com efeito.
α não existe, e $x^{II} = x^{I+II}$

$$\text{donde} \qquad du = \frac{\partial u}{\partial\,(x^I\,,\,x^{II})}\cdot\begin{bmatrix} dx^I \\ dx^{II}\end{bmatrix} = 0$$

$$\text{ou} \qquad \frac{\partial u}{\partial x^i_{A-a}} = \frac{\partial u}{\partial u^i_a}\ .$$

VI) Estabilidade

VI 1) *Introdução*

Tratamos em V) a condição *necessária* ou de equilíbrio, neste capítulo será abordada a condição *suficiente* ou de *estabilidade*.

Damos a seguir o resumo das várias situações possíveis de ocorrer:

1.° caso	$\begin{cases} d\,u_A = 0 \\ d^2 u_A > 0 \end{cases}$	O sistema está em equilíbrio estável.
2.° caso	$\begin{cases} d\,u_A = 0 \\ d^2 u_A < 0 \end{cases}$	O sistema está em equilíbrio instável.
3.° caso	$\begin{cases} d\,u_A = 0 \\ d^2 u_A \lesseqgtr 0 \end{cases}$	O sistema está em equilíbrio mas a estabilidade depende do deslocamento virtual imposto. O sistema só pode ser condicionalmente estável ou (instável).
4.° caso	$\begin{cases} d\,u_A = 0 \\ d^2 u_A = 0 \end{cases}$	O sistema está em equilíbrio mas a sua estabilidade é *indefinida* e só pode definir-se ou impondo condições aos deslocamentos ou testando derivadas de ordem superior.
4.° — 1.° caso	$\begin{cases} d\,u_A = 0 \\ d^2 u_A = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} d^3 u_A = 0 \\ d^4 u_A > 0 \end{cases}$	O sistema cuja estabilidade era indefinida (4.° caso), é afinal *estável.*
4.° — 2.° caso	$\begin{cases} d\,u_A = 0 \\ d^2 u_A = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} d^3 u_A = 0 \\ d^4 u_A < 0 \end{cases}$	O sistema é instável.
4.° — 3.° caso	$\begin{cases} d\,u_A = 0 \\ d^2 u_A = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} d^3 u_A = 0 \\ d^4 u_A \gtrless 0 \end{cases}$	O sistema só condicionalmente poderá ser estável (ou instável).
4.° — 4.° caso	$\begin{cases} d\,u_A = 0 \\ d^2 u_A = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} d^3 u_A = 0 \\ d^4 u_A = 0 \end{cases}$	A estabilidade do sistema é *indefinida.*

Felizmente que nas aplicações de termoestática, os problemas de estabilidade resolvem-se, em geral, até $d^2 u_A$ e só excepcionalmente será necessário estudar $d^4 u_A$, porém, formalmente não há limite na ordem de diferenciação.

É evidente que à medida que se avança na ordem da diferenciação, menos clara se torna a natureza da estabilidade do sistema, pois só diferenças de ordem muito elevada permitem esclarecer e conhecer da estabilidade e portanto menos segura e, fìsicamente, mensurável ou observável é essa estabilidade.

VI 2) *Estabilidade de sistemas não condicionados*

Já vimos em 61) que:

$$d^2 u_A = X_a^o \, d^2 u_a$$

mas $X_a^o \geqslant 0$, porque as propriedades médias extensivas são essencialmente *positivas*, mas o sistema a, embora pequeno, tem uma extensão X_a^o não *nula*, então tanto monta testar a positividade de $d^2 u_A$ como à de $d^2 u_a$.

Daqui por diante, para aligeirar a simbologia, suprimiremos o índice a.

Tendo em vista o que se acaba de expor será:

$$d^2 u_A \longrightarrow d^2 u_a \longrightarrow d^2 u = [d\,x]^t\ [u_{ij}]\ [d\,x]$$

Em cálculo matricial prova-se que o estudo de $d^2 u$ se pode fazer através da matriz $[u_{ij}]$ e, em particular, o espectro da matriz $[u_{ij}]$, fornece informações importantes a respeito de $d^2 u$.

Sejam $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n$ as n raízes de equação característica $[u_{ij}] - \lambda\, I = 0$; estas raízes podem algumas ou todas serem iguais, e se $[u_{ij}]$ for uma matriz simétrica de termos reais como sucede com u (energia interna) esses λ_i são todos reais.

Podem então considerar-se várias hipóteses no que respeita às raízes λ_i.

Ordenemos as raízes em valor relativo; e seja $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots\ldots \leqslant \lambda_n$, então teremos:

a) $\lambda_1 > 0$ então todos os $\lambda_i > 0$, $d^2 u > 0$ e o sistema é estável (u é mínimo). A matriz $[u_{ij}]$ é *positiva e definida.*

b) $\lambda_n < 0$ então todos os $\lambda_i < 0$, $d^2 u < 0$ e o sistema é instável (u é máximo). A matriz $[u_{ij}]$ é *negativa definida.*

c) $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_n > 0 \end{cases}$ haverá raízes positivas e negativas a estabilidade do sistema, se houver, só será *condicional,* e haverá que impor condições aos deslocamentos virtuais $d\,x^i$.
A matriz $[u_{ij}]$ é *indefinida.*

d) $\{\ \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, isto é, algumas das raízes são nulas, $d^2 u = 0$ e o sistema só condicionalmente poderá ser estável (ou instável) ou então terão de ser estudadas diferenciais de ordem superior.
A matriz $[u_{ij}]$ é *semidefinida.*

Está assim estabelecida a correspondência entre as raízes λ_i da matriz $[u_{ij}]$ e $d^2 u$ e portanto com a estabilidade dos sistemas termoestáticos.

Veja-se o Apêndice no fim do artigo para informações complementares sobre matrizes.

VI 3) *Estabilidade condicional*

Já vimos em 35) que

$$d^2 u = (d\,x^{II})^t\ [W_{ij}]\ d\,x^{II}$$

o estudo de $d^2 u$ far-se-á por intermédio da matriz $[W_{ij}]$ e tudo quanto se disse para $[u_{ij}]$ se repete aqui «mutatis mutandis».

Tem interesse contudo rever alguns casos particulares.

a) o sistema $\{c^k = 0$ é linear, então a matriz $\dfrac{\partial\,(c^1 \ldots\ldots c^k)}{\partial\,(x^1 \ldots\ldots x^k)}$ é uma matriz de termos constantes e tal sucede igualmente com a matriz α.

Então $\dfrac{\partial\,\alpha}{\partial\,x^i} = \dfrac{\partial\,\alpha^t}{\partial\,x^j} = 0$ donde β e α serem nulos. e $[W_{ij}]$ reduz-se a:

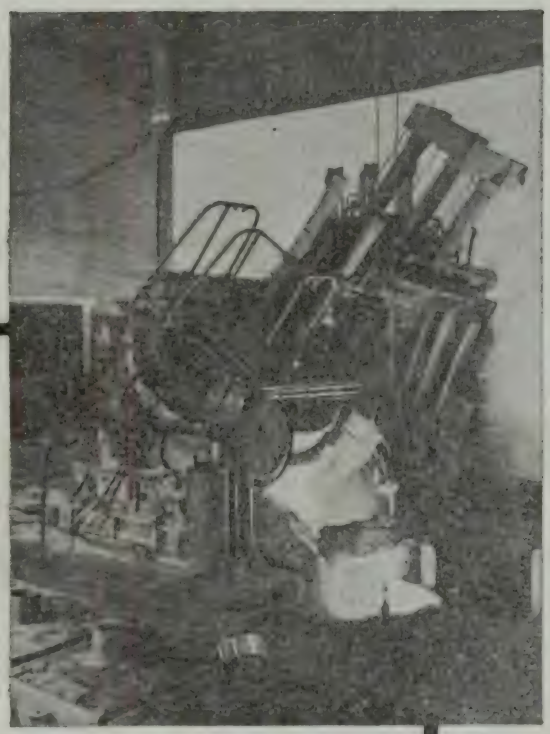
$$70)\quad [W_{ij}] = \alpha^t\ A_a\ \alpha + \alpha^t\ u_b + u_c\ \alpha + u_d$$

Esta propriedade é muito importante porque na vizinhança do ponto do espaço Termoestático no qual se deseja testar a estabilidade do sistema é sempre possível linearisar o sistema de condições $c^k = 0$.

Esta linearisação de $c^k = 0$, permite, sem perda de generalidade, estudar-se a estabilidade do sistema por meio de $[W_{ij}]$ dado por 70).

ÁS INDÚSTRIAS

METALO-MECÂNICAS
MINEIRAS
OBRAS PÚBLICAS
CONSTRUÇÃO NAVAL
ETC.



- PEÇAS PARA A CONSTRUÇÃO DE MÁQUINAS OU ACESSÓRIOS.
- PEÇAS DE DESGASTE, MAXILAS, DENTES PARA ESCAVADORAS, ETC.
- PISOS PARA TRACTORES.
- RODAS PARA VAGONAS E VAGONETAS EM AÇO ESPECIAL, ETC.

EM

FERRO FUNDIDO
OU AÇO VASADO

LIGAS NORMAIS OU ESPECIAIS PARA TODAS AS INDÚSTRIAS E APLICAÇÕES.
MOLDAÇÃO MECÂNICA EM MÉDIAS OU GRANDES SÉRIES.
FERRO COM GRAFITE ESFEROIDAL, NOSSA LIGA "GN" (SOB PATENTE DA TH MOND NICKEL, C.º)
REVESTIMENTOS PARA MOÍNHOS "SYMONS" (LICENÇA DA NORDBERG MANUF. C.º).

A NOSSA FIRMA ESTÁ INSCRITA NA "LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING"
SECÇÃO TÉCNICA DE CONSULTA
LABORATÓRIOS PRIVATIVOS DE ANÁLISES PARA CONTROLE FÍSICO-QUÍMICO-METALOGRÁFICO E RADIOGRÁFICO.

AA LISBOA

ALFREDO ALVES & C.ª (FILHOS)
E FÁBRICAS VULCANO E COLARES

RUA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS, 5 — LISBOA — TELEF. 31710
NO PORTO: P. D. JOÃO I, 25-1.º — TELEF. 24771

• EQUIPO •

SOCIEDADE NACIONAL DE PETRÓLEOS
S.A.R.L.

b) O sistema $c^k = 0$ além de linear nele só intervêm k variáveis independentes x^i.

Então como det $\dfrac{\partial (c^1 \ldots \ldots c^k)}{\partial (x^1 \ldots \ldots x^k)} \neq 0$, terá de ser $d x^1 = \ldots \ldots = d x^k = 0$ ou seja, há k variáveis extensivas constantes $(d x_j = 0)$ $j = 1 \ldots \ldots k$.

Então $[\alpha^i_j] = 0$ e a matriz $[W_{ij}]$ reduz-se a $[W_{ij}] = u_d$.

(p. p.)

Esta propriedade é muito importante, porque:

1.° Basta testar u_d que é de ordem $p < n$.

2.° Pode $[u_{ij}]$ ter raízes negativas ou nulas e portanto d^2u não ser estável, mas u_d pode ter só raízes positivas e então o sistema é condicionalmente estável.

VII) Inversão de Matrizes e suas propriedades

VII 1) *Introdução*

Já vimos que dum geral será:

$$71) \quad [d u_i] = [u_{ij}] \, [d x^j] = \frac{\partial (u_1 \ldots\ldots u_n)}{\partial (x^1 \ldots\ldots x^n)} \cdot [d x^j]$$

Partindo a matriz pela linha k e coluna k será ainda:

$$72) \quad \begin{cases} d u_I = \dfrac{\partial (u_I)}{\partial (x^I)} \cdot d x^I + \dfrac{\partial (u_I)}{\partial (x^{II})} \cdot d x^{II} \\[2ex] d u_{II} = \dfrac{\partial (u_{II})}{\partial (x^I)} \cdot d x^I + \dfrac{\partial (u_{II})}{\partial (x^{II})} \cdot d x^{II} \end{cases}$$

ou

$$73) \quad \begin{cases} d x_I = \dfrac{\partial (x^I)}{\partial (u_I)} \cdot d u_I - \dfrac{\partial (x^I)}{\partial (u_I)} \cdot \dfrac{\partial (u_I)}{\partial (x^{II})} \cdot d x_{II} \\[2ex] d u_{II} = \dfrac{\partial (u_{II})}{\partial (x^I)} \cdot \dfrac{\partial (x^I)}{\partial (u_I)} \cdot d u_I + \\[2ex] \qquad + \left\{ - \dfrac{\partial (u_{II})}{\partial (x^I)} \cdot \dfrac{\partial (x^I)}{\partial (u_I)} \cdot \dfrac{\partial (u_I)}{\partial (x^{II})} + \dfrac{\partial (u_{II})}{\partial (x^{II})} \right\} \cdot d x^{II} \end{cases}$$

que pode representar-se ainda sob a forma:

$$74) \quad \begin{bmatrix} d x^I \\ \ldots\ldots \\ d u^{II} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial (x_I)}{\partial (u^I)} & - \dfrac{\partial (x^I)}{\partial (u_I)} \cdot \dfrac{\partial (u_I)}{\partial (x^{II})} \\ \hdashline \dfrac{\partial (u_{II})}{\partial (x^I)} \cdot \dfrac{\partial (x^I)}{\partial (u_I)} & - \dfrac{\partial (u_{II})}{\partial (x^I)} \cdot \dfrac{\partial (x^I)}{\partial (u_I)} \cdot \dfrac{\partial (u_I)}{\partial (x^{II})} + \\ & + \dfrac{\partial (u_{II})}{\partial (x^{II})} \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} \partial u_I \\ \ldots\ldots \\ d x^{II} \end{bmatrix}$$

Esta operação, *inversão parcial* da matriz, só é possível se:

$$\det \frac{\partial (u_I)}{\partial (x^I)} \neq 0 \qquad \text{como, em geral, sucede em Termostática.}$$

Tendo em atenção o significado dos Jacobianos representados em 74) poderá explicitar-se esta expressão e tomar a forma seguinte:

$$75)\quad \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^k \\ \cdot \\ du_{k+1} \\ \vdots \\ du_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u_k} & \vdots & \frac{\partial x^1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^u} \\ \frac{\partial x^k}{\partial u_1} & \cdots & \frac{dx^k}{\partial u_k} & \vdots & \frac{\partial x_k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial x^k}{\partial x^u} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \vdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial u_{k+1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial u_{k-1}}{\partial u^k} & \vdots & \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x^u} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ \frac{\partial u}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial u_u}{\partial u_k} & \vdots & \frac{\partial u_u}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial u_u}{\partial x^u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_k \\ \cdot \\ dx^{k+1} \\ \vdots \\ dx^u \end{bmatrix}$$

$$\text{ou} \qquad \begin{bmatrix} dx^I \\ du^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{ik} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} du^I \\ dx^{II} \end{bmatrix}$$

A função $[N_{ik}]$ dá-se o nome de transformada de Lagrange — Legendre e as mais representativas são:

$$76)\quad \begin{array}{lll} \text{função de Helmholtz} & & F = u - T.s \\ \quad\text{»} & \text{» Entálpica} & H = u + P.v \\ \quad\text{»} & \text{» Gibbs} & G = u - T.s + Pv \end{array}$$

e constituem respectivamente inversões parciais entre:

$$\begin{array}{rcl} T\,e\,s & \longrightarrow & \text{Helmholtz} \\ -\,P\,e\,v & \longrightarrow & \text{Entálpica} \\ \text{e}\ \left\{\begin{matrix} T\,e\,s \\ P\,e\,v \end{matrix}\right\} & \longrightarrow & \text{Gibbs} \end{array}$$

VII 2) *Variáveis dependentes e independentes*

As relações que traduz a nova forma 75) fazem das variáveis $(du_1 \ldots\ldots du_k\ ,\ dx^{k+1} \ldots\ldots dx^u)$ variáveis independentes e $(dx^1 \ldots\ldots dx^k\ ,\ du_{k+1} \ldots\ldots du_n)$ desempenham a função de variáveis dependentes.

A inversão de matriz (parcial ou total) põe em evidência o sentido arbitrário que toma a classificação das variáveis em dependentes e independentes.

De facto o que existe é um sistema de n relações a $2n$ variáveis que permite determinar n delas em relação às restantes.

Esta circunstância dá maior generalidade a forma das funções que definem as condições $c^k = 0$, as quais podem tomar a forma seguinte:

$$77)\quad f^j\,(u_1 \ldots\ldots u_n\ ,\ x^1 \ldots\ldots x^n) = 0$$

$$j = (1\,, \ldots\ldots k) \text{ e } k \leqslant n$$

As funções $f^j = 0$ têm de ser contínuas no domínio em estudo.

Note-se que é sempre possível reduzir a forma $f_j = 0$ à forma $c_j = 0$, substituindo $u_1\,, \ldots\ldots, u_n$

pelas funções respectivas de $x^1 \ldots\ldots x^n$, funções essas que são contínuas no domínio em estudo por hipótese.

VII 3) *Condições da forma* $f^j(u_1 \ldots\ldots u_n, x^1 \ldots\ldots x^n) = o$

Admitamos então que são dadas $k \leqslant n$ condições da forma $f^j(u_1 \ldots\ldots u_n, x^1, \ldots\ldots x^n)$, sendo $j = 1, \ldots\ldots k$; as funções f^j são contínuas no domínio em estudo.

Escolhamos n variáveis para variáveis independentes e sejam $(u_1 \ldots\ldots u_k, x^{k+1} \ldots\ldots x^n)$

Para qualquer $df^j = 0$ será:

$$78)\quad df^j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \times \left(\sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x^i} dx^i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \cdot du_i \right)$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial x^i + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x^j} \times \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} du_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} dx^i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \partial u_i + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_j}{\partial u_i} du_i + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u^j} \times \sum_{i=i}^{k} \frac{\partial x^j}{\partial u_i} \cdot du_i +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial f}{dx^i} dx^i + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \cdot dx^i + \sum_{j=i}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} \times \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \cdot dx^i$$

ou ainda:

$$79)\quad df^j = \left\{ \frac{\partial f}{\partial (u_I)} + \frac{\partial f}{\partial (x^I, u_{II})} \times \frac{\partial (x^I, u_{II})}{\partial (u_I)} \cdot \right\} du_I +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial f}{\partial (x^{II})} + \frac{\partial f}{\partial (x^I, u^{II})} \times \frac{\partial (x^I, u_{II})}{\partial (x^{II})} \right\} dx^{II}$$

sendo, como sempre:

$$dx^I = \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^k \end{bmatrix} \qquad dx^{II} = \begin{bmatrix} dx^{k+1} \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}$$

$$du^I = \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du^k \end{bmatrix} \qquad du_{II} = \begin{bmatrix} dx_{k+1} \\ \vdots \\ du_n \end{bmatrix}$$

Os Jacobianos de forma $\frac{\partial f}{\partial (u_I)}$, $\frac{\partial f}{\partial (x^{II})}$ e $\frac{\partial f}{\partial (x^I, u_{II})}$ são obtidos a partir das equações 17).

Os Jacobianos de forma $\frac{\partial (x^I, u_{II})}{\partial (u_I)}$ e $\frac{\partial (x^I, u_{II})}{\partial (x^{II})}$ são obtidos a partir da matriz [Nik] em 75).

Posto isto, designamos simbòlicamente df^i, em 79), por:

$$80)\quad df^i = [f^i_1 \ldots f^i_u] \times \begin{bmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_k \\ dx^{k+1} \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix} = 0$$

Então será possível escrever a equação matricial seguinte:

$$81)\quad \begin{bmatrix} f_1^1 \\ \vdots \\ f_1^k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d\,u_I \\ \vdots \\ d\,u_k \\ d\,x^{k+1} \\ \vdots \\ d\,x^n \end{bmatrix} = 0$$

A equação 81) é idêntica à equação 17) e desempenha idêntica função.

Novamente se impõe à matriz $[f_k^i]$ que tenha a ordem K, ou seja, há pelo menos um determinante K ordem não nulo:

$$82)\quad \det \frac{\partial\,(f^1 \ldots f^k)}{\partial\,(\underbrace{u_i \ldots x_c}_{k})} \neq 0$$

Então as equações abaixo indicadas são suficientes para estudar a estabilidade do sistema nos precisos termos em que o foi quando as matrizes em confronto eram $[c_i^j]$ e $[u_{ik}]$ e portanto não interessa repetir aqui.

As equações são:

$$83)\quad \begin{cases} \begin{bmatrix} d\,x^I \\ d\,u_{II} \end{bmatrix} = [V_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} d\,u_I \\ d\,x^{II} \end{bmatrix} \\ \text{e} \\ \dfrac{\partial\,(f^1 \ldots f^k)}{\partial\,(u_I, x^{II})} \times \begin{bmatrix} d\,u_I \\ d\,x^{II} \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

VII - 4) *Alguns casos particulares*

Os casos particulares são os mesmos considerados quando se estudaram as funções $C^k = 0$, isto é, linearidade de $f^k = 0$ e dentro deste o caso ainda mais particular de $f^j = 0$, $(j = 1 \ldots k)$, só intervirem as variáveis $(u_I, \ldots, u_k)$ e $\det \dfrac{\partial\,(f^1 \ldots f^k)}{\partial\,(u_I \ldots u_k)} \neq 0$, então será $d\,u_I = \ldots = d\,u_k = 0$ e encontramo-nos na situação referida na alínea b) de VI 3) e já vimos então que só interessa estudar o menor principal N_d, isto é, ser for:

$$84)\quad \begin{bmatrix} d\,x^I \\ \ldots\ldots \\ d\,u_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_a & \vdots & N_b \\ \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ N_c & \vdots & N_d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d\,u_I \\ \ldots\ldots \\ d\,x^{II} \end{bmatrix}$$

então, se $du_I = 0$, só interessa examinar o menor N_d.

Assim, se $d\,u_I = \ldots\ldots\ d\,u_k = 0$, procede-se primeiro a inversão parcial de matriz $[V_{ij}]$ em relação a $du_I, \ldots\ldots\ du_k$ e obtém-se a matriz $[N_{ij}]$ e estuda-se apenas o menor N_d dessa matriz.

Note-se que $N_d \equiv V_d$, o que é fácil de demonstrar, para o que basta recordar que

$$85)\quad d\,u_{II} = \frac{\partial\,(u_{II})}{\partial\,(x^{II})} \cdot d\,x^{II} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\,(u_{II})}{\partial\,(x^{II})} \equiv N_d \equiv V_d$$

Esta circunstância permite imediatamente conhecer N_d sem ter que inverter parcialmente a matriz $[v_{ij}]$.

VIII) Introdução do conceito de isolamento como uma condição exterior ao sistema

Ao estudar no Capítulo IV 1 e 2) o isolamento (e diferenciação) do sub-sistema *a* dentro do sistema A, fez-se referência à escolha de um parâmetro x^0 para medir a extensão de *a* e fixá-la num certo valor.

Depois de tratado e estudado o equilíbrio e estabilidade condicionados é fácil de ver que fixar x_a^0 é o mesmo que acrescentar às k condições $c_i = 0$ mais uma, $c^0 (x^0, x \ldots x^n) = 0$.

Nestes termos, a estabilidade dum Sistema Termoestático pode sempre ser tratada, como um problema de equilíbrío e estabilidade condicionado, uma vez que haverá, pelo menos, uma condição, $c^0 (x^0 \ldots x^n) = 0$. Porém o espaço termoestático terá $(n + 1)$ dimensões pois além das variáveis $x^1 \ldots x^n$ há que acrescentar a variável x^0, eliminada na operação de isolamento.

Esta forma de tratar é uniforme e muito mais geral e por isso se recomenda. Aliás todo o formulário anterior se aproveita, basta que no índice *n* esteja contada a variável x^0 destinada a definir o isolamento de *a* em A.

IX) Estabilidade de sistemas condicionados quando $d^2 u = 0$

Já vimos, em VI), que sendo $d^2 u = 0$, é necessário estudar as diferenciais $d^3 u$ e $d^4 u$ para esclarecer da estacionaridade da função u no ponto considerado.

Como condição necessária terá de ser $d^3 u = 0$, e como condição suficiente terá de ser ainda $d^4 u > 0$.

IX 1) *Condição necessária* $d^3 u = 0$

De 40) sabe-se que:

86) $d u = (W_s^I \alpha + W_s^{II}) \cdot d x^{II} = 0$ e para que 86) se verifique qualquer que seja dx^{II} será ainda

87) $W_s^I \alpha + W_s^{II} = 0$

o significado de W_s^I e W_s^{II} encontra-se nas expressões 38).

O caso particular de ser $\alpha = 0$ implica que:

$$W_s^{II} = u_s = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} u_{sij}, \ldots\ldots, \frac{\partial}{x^n} u_{sij} \right] \text{ e } d x^{II} = \begin{bmatrix} d x^1 \\ \vdots \\ d x^n \end{bmatrix}$$

IX 2) *Condição suficiente* : $d_4 u > 0$

Para estudar $d^4 u$, há que examinar a matriz indicada na expressão 48) ou, se α for de termos constantes, a expressão 49) ou, se $\alpha = 0$, basta estudar $[M_{II\,II}]$.

Sucede porém que a averiguação da estabilidade de sistemas Termoestáticos, nas regiões do espaço onde $d^2 u = 0$, faz-se ao sistema livre (sem condições) porque o que interessa é conhecer as propriedades do sistema e não do sistema mais as condições exteriores.

Então a expressão a empregar é a indicada em 14).

Por não ser o objecto deste trabalho o estudo $d^4 u$, não se desenvolve mais este ponto.

X) Método dos Multiplicadores de Lagrange

Um método frequentemente empregado para estudar máximos e mínimos condicionados é o dos multiplicadores de Lagrange.

Nalguns casos este método tem vantagens sobre o que foi desenvolvido nos capítulos anteriores e por isso dá-se aqui um rápido resumo.

Seja dada uma função $u (x^1 \ldots x^n)$ continua em determinada região do espaço e procura-se conhecer dos seus máx. e min. nessa região.

Sejam $m \leqslant n$ condições c^k da forma:

88) $c^k (x^1 \dots x^n) = 0 \qquad K = 1, \dots, n$ (c^k é contínua nessa região).

Designamos por:

$$89) \quad \begin{cases} c_i^k = \dfrac{\partial c^k}{\partial x^i} \\ c_{ij}^k = \dfrac{\partial c^k}{\partial x^i \, \partial x^j} \\ \dfrac{\partial (c^1 \dots c^k)}{\partial (x^1 \dots x^n)} = \underset{(m,\, n)}{\begin{bmatrix} c_1^1 \dots c_n^1 \\ c_1^m \dots c_n^m \end{bmatrix}} \end{cases}$$

Admitamos ainda que a ordem da matriz é m, isto é, há um ou vários determinantes de ordem m não nulos.

O Método dos multiplicadores de Lagrange consiste em formar a função $U(x^1 \dots x^n)$ tal que:

$$90) \quad U = u + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k c^k$$

a λ_k dá-se o nome de multiplicador de Lagrange e são a determinar.

Trata-se a função U, em vez de u, como se U não estivesse condicionado.

Cálculo de **d U**

$$91) \quad dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} \cdot dx^i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial c^k}{\partial x^i} \cdot dx^i$$

que pode representar-se também sob a forma:

$$92) \quad dU = \left\{ \underset{(1,\, n)}{\frac{\partial (u)}{\partial (x^1 \dots x^n)}} + \underset{(1,\, m)}{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}^t} \times \underset{(m,\, n)}{\frac{\partial (c^1 \dots c^m)}{\partial (x^1 \dots x^n)}} \right\} \times \underset{(n,\, 1)}{\begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}}$$

A condição necessária de estacionaridade será $dU = 0$ e para que tal verifique qualquer que seja o vector $\begin{bmatrix} x^1 \\ x^n \end{bmatrix}$ será ainda:

$$93) \quad \frac{\partial (u)}{\partial (n^1 \dots x^n} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}^t \times \frac{\partial (c^1 \dots c^m)}{\partial (x^1 \dots x^n)} = 0$$

Cálculo de $d^2 U$

$$94) \quad d^2 U = \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}^t \left\{ \frac{\partial (u_1 \dots\dots u_n)}{\partial (x^1 \dots\dots x^n)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial (x^1 \dots\dots x^n)} \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}^t \frac{\partial (c^1 \dots\dots c^n)}{\partial (x^1 \dots\dots x^n)} \right) \right\} \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{bmatrix}$$

Sendo $\quad u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x^i} \qquad i = 1, \ldots\ldots, n$

Realizando as operações indicadas em 94), temos:

$$95)\quad d^2 U = \sum_{j=1}^{n} \underset{i=1}{\overset{n}{x}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \, \partial x^j} \, . \, d x^i \, d x^j \rightarrow \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial^2 c^k}{\partial x^i \, \partial x^j} \, d x^i \, d x^j$$

Designando por

$$96)\quad A_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x^i \, \partial x^j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial^2 c^k}{\partial x^i \, \partial x^j}$$

A matriz $[A_{ij}]$ toma a forma:

$$97)\quad [A_{ij}] = \frac{\partial (u_1 \ldots\ldots u_n)}{\partial (x^1 \ldots\ldots x^n)} + \frac{\partial}{\partial (x^1 \ldots\ldots x^n)} \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}^t \frac{\partial (c^1 \ldots\ldots c^m)}{\partial (x^1 \ldots\ldots x^n)} \right)$$

e substituido 97) em 94) obtemos finalmente:

$$98)\quad d^2 U = \begin{bmatrix} d x^1 \\ \vdots \\ d x^n \end{bmatrix}^t \times [A_{ij}] \times \begin{bmatrix} d x^1 \\ \vdots \\ d x^n \end{bmatrix}$$

Mas $(d\,x^1 \ldots\ldots d\,x^n)$ estão sujeitas às condições $c^k = 0$, e daí resulta que:

$$79)\quad [c_i^k] \, . \, d x^i] = 0$$

Donde

$$100)\quad \underset{(1,\,m)}{[d y^i]^t} \cdot \underset{(m,\,n)}{[c_i^k]} \cdot \underset{(n,\,1)}{[d x^i]} = 0$$

Sendo $[d y_i]^t$ um vector arbitrário $(m, 1)$ e transpondo 100) obtém-se:

$$100)\quad \underset{(1,\,n)}{[d x^i]^t} \quad \underset{(n,\,m)}{[c_i^k]^t} \cdot \underset{(m,\,1)}{[d y^i]} = 0$$

As equações 100) e 101) podem ainda escrever-se:

$$102)\quad \begin{bmatrix} [d x^i] \\ \\ [d y^i] \end{bmatrix}^t \times \begin{bmatrix} 0 & \vdots & [c_i^k]^t \\ \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ [c_i^k] & \vdots & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [d x^i] \\ \\ [d y^i] \end{bmatrix} = 0$$

Conjugando 98) e 102) obtém-se finalmente:

$$103)\quad d^2 U = \begin{bmatrix} [d x_i] \\ \\ [d y^i] \end{bmatrix}^t \times \begin{bmatrix} [A^{ij}] & \vdots & [c_i^k] \\ \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ [c_i^k] & \vdots & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [d x^i] \\ \\ [d y^i] \end{bmatrix}$$

O estudo da positividade de $d^2 U$ faz-se por meio da matriz:

$$104)\quad \begin{bmatrix} [A_{ij}] & [c_i^k]^t \\ \\ [c_i^k] & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica que permita determinar os valores próprios da matriz é:

$$105)\quad \begin{bmatrix} [A_{ij}] & [C_i^k]^t \\ [C_i^k] & 0 \end{bmatrix} - q \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = 0$$

$$(m+n),(m+n) \qquad (m+n),(m+n)$$

Este método tem o inconveniente de aumentar o número de linhas e colunas de matriz que passam a $m + n$.

No método anterior a matriz ou matrizes a testar teriam $(n - m)$ linhas e colunas.

Só o problema particular a resolver poderá decidir qual dos métodos é mais conveniente.

Apêndice

Reserva-se para um apêndice a matéria que adiante se expõe, por se tratar simplesmente de rememorar algumas noções e propriedades de matrizes.

Se [y] e [x[forem dois vectores coluna (n,1) e A uma matriz (n, n), e se entre estas três entidades existir a relação seguinte:

$$[y] = A \cdot [x]$$

Então se T for uma matriz (n, n) chama-se operação de similaridade à que adiante se indica:

$$T\,[y] = T\,A\,T^{-1}\,T\,[x]$$

e simbolizando $\quad y = T\,[y]$

$\quad x = T\,[x]$

Será ainda $\quad y = T\,A\,T^{-1}\,x$

Ora esta operação de similaridade, no caso das matrizes simétricas e reais, realizada por um operador $T \equiv \Omega$ ortogonal ($\Omega^{-1} = \Omega^t$) pode diagonalisar a matriz A.

$$\Omega\,A\,\Omega^{-1} = \Omega\,A\,\Omega^t = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Demonstra-se ainda no cálculo matricial que a operação de similaridade não altera o *espectro de matriz*, isto é, os valores próprios $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n$ da matriz A e da matriz $T\,A\,T_{-1}$ são os mesmos.

Daqui resulta que os valores próprios de A são os mesmos de D e estes são $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n$.

Admitam pois que se diagonalisou a matriz A e se obteve D.

Designemos por:

$$\begin{cases} \Pi \text{ o número de raízes positivas} \\ \nu \text{ » » » » negativas} \\ \text{ordem de matriz a } r = \Pi + \nu \\ \text{assinatura de » a } \tau = \Pi - \nu \end{cases}$$

A operação de similaridade não alterou nem r nem τ pois não alterou Π nem ν, uma vez que as raízes de A e D são as mesmas.

Tudor

PORTUGAL

A MELHOR

BATERIA

CIMA

COMPANHIA INDUSTRIAL DE MADEIRAS AFRICANAS, S. A. R. L.

contraplacados decorativos
contraplacados especiais
placas de revestimento
placas lameladas
folheados de fantasia
madeiras exóticas secas

FÁBRICA EM ALHANDRA (SAPAL) TEL. 05 02 02 • 05 02 03 • 05 02 66
SEDE EM LISBOA — R. DAS JANELAS VERDES, 3 — TEL. 66 01 76 (PABX) — TELEG. CIMAFRICA
DELEGAÇÃO EM AFRICA — CAIXA POSTAL 135 — CABINDA

SEMPRE CRIANDO DA MADEIRA MELHOR BELEZA

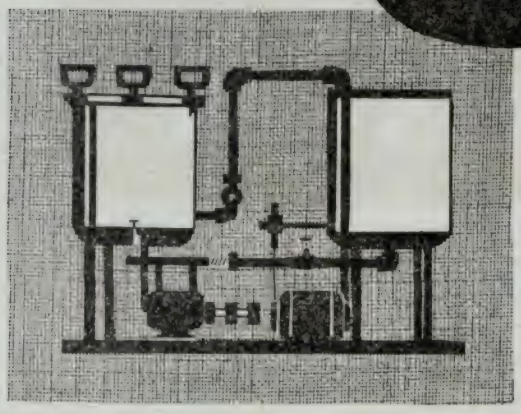
---

filtros FILFRO, L.da

ALGUMAS DAS PRINCIPAIS APLICAÇÕES:

Água • Açúcar • Óleos vegetais, animais e minerais • Cerveja
Sabão liquido • Resinas naturais e sintéticas • Vinhos • Vinagre
Glicerina • Tintas • Vernizes
Sumos de frutos • Xaropes
Azeite • Industria quimica

FILTROS NACIONAIS PARA TODOS OS PROBLEMAS DE FILTRAÇÃO



Inteiramente fabricados em Portugal, por técnicos e operários portugueses, segundo a patente port. n.º 29.917

Dezenas de instalações a funcionar no país atestam a sua excelente qualidade.

RUA CAPITÃO FILIPE DE SOUSA, 128
CALDAS DA RAINHA

É evidente que $n \geqslant r$ e $(n-r)$ representa o número de raízes nulas.
Podem formular-se as seguintes hipóteses:

a) $n = r = \sigma$ a matriz só tem raízes positivas e é portanto — *positiva definida.*
b) $n < r = \sigma$ a matriz só tem raízes positivas ou nulas e é portanto — *positiva semidefinida.*
c) $r > \sigma$ a matriz tem raízes positivas e negativas e é *indefinida.*
d) $n = r = -\sigma$ a matriz tem só raízes negativas e designa-se por *negativa-definida.*
e) $n > r = -\sigma$ a matriz tem raízes negativas e nulas e designa-se por *negativa semidefinida.*

Tem interesse ainda chamar a atenção que a forma quadrática derivada da matriz D toma a forma seguinte:

$$x^t \; D \; x = [x^1 \ldots\ldots x^n] \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 (x^1)^2 + \ldots\ldots + \lambda_n (x^n)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x^i)^2$$

Há vários métodos para diagonalisar matrizes simétricas de elementos riais, entre eles fazemos referência aos métodos de Lagrange e Jacobi, que não apresentaremos aqui.

Algumas propriedades particulares têm no entanto interesse mencionar:

1.º) Uma forma quadrática só é positiva definida se todos os *menores principais* de matriz forem *positivos* ($D_i > o \quad i = 1, \ldots\ldots n$).

2.º) Uma forma quadrática é positiva semidefinida se todos os menores principais forem *não negativos.*

3.º) Uma forma quadrática é indefinida se os menores principais da matriz forem positivos e negativos.

BIBLIOGRFIA PRINCIPAL

«The Theory of Matrices» de F. R. Gautmacher — Chelsea Publishing» Co. N.º 7.
«Maxima et minima» - (Finance et Economie Appliquée) — de R. Frisch Dunod.
«Foundations of Economic Analysis» — Paul A. Sumuelson, Harvard Economic Press.
«Thermodynamics» — Herbert B. Callen, John Wiley & Sons Inc.

Conferência Mundial da Energia

A Comissão Nacional Portuguesa da Conferência Mundial da Energia, à semelhança de organizações congéneres de outros países, pretende intensificar a sua actividade e promover o esclarecimento e a difusão de algumas ideias àcerca das possibilidades energéticas da metrópole.

Com este objectivo, vai promover a realização de um ciclo de conferências subordinadas ao tema geral de «Recursos energéticos metropolitanos — fontes primárias».

As conferências a realizar, em número de nove, terão lugar em Lisboa e Porto, respectivamente na última quinzena de Novembro e primeira quinzena de Dezembro próximo, em local a definir oportunamente.

Conta-se, em princípio, com a colaboração de técnicos das seguintes entidades:

— Direcção-Geral dos Serviços Hidráulicos
— Direcção-Geral dos Combustíveis
— Direcção-Geral de Minas e Serviços Geológicos
— Direcção-Geral dos Serviços Florestais e Aquícolas
— Repartidor Nacional de Cargas
— Junta de Energia Nuclear
— Companhia Portuguesa de Indústrias Nucleares.

Comissão Internacional de Irrigação e Drenagem

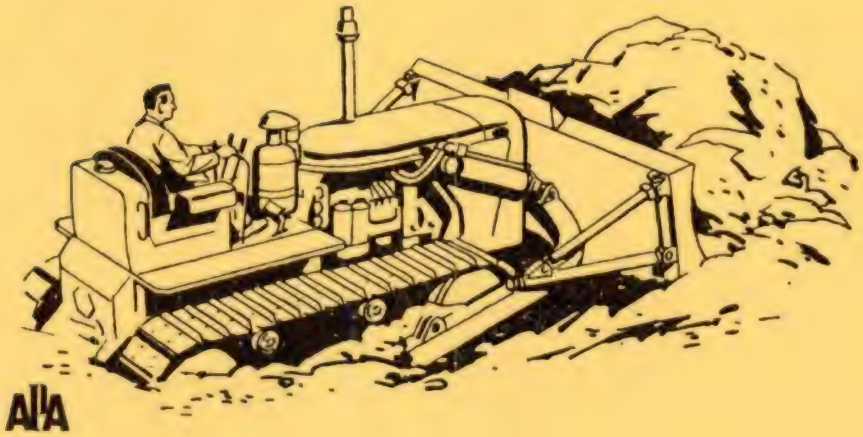
Comissão Nacional Portuguesa

Encontra-se à venda a publicação «The ICID Bibliography on Irrigation, Drainage, River Training and Flood Control», ao preço de 5 rupias indianas, cada exemplar.

Os pedidos devem ser feitos por intermédio desta Comissão Nacional Portuguesa, acompanhados dum cheque do correspondente valor, pagável à ordem da «The International Comission on Irrigation and Drainage».

CATERPILLAR*

TRACTORES DE RASTO E DE RODAS • PÁS MECÂNICAS (TRAXCAVATORS*) DE RASTO E DE RODAS • ESCARIFICADORES • BULLDOZERS SCRAPERS • MOTONIVELADORAS



MOTORES INDUSTRIAIS
GRUPOS ELECTROGÉNEOS
MOTORES MARÍTIMOS
ASSISTÊNCIA
PEÇAS SOBRESSALENTES
REPARAÇÕES

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS EM
PORTUGAL, ILHAS ADJACENTES, CABO VERDE E GUINÉ

STET

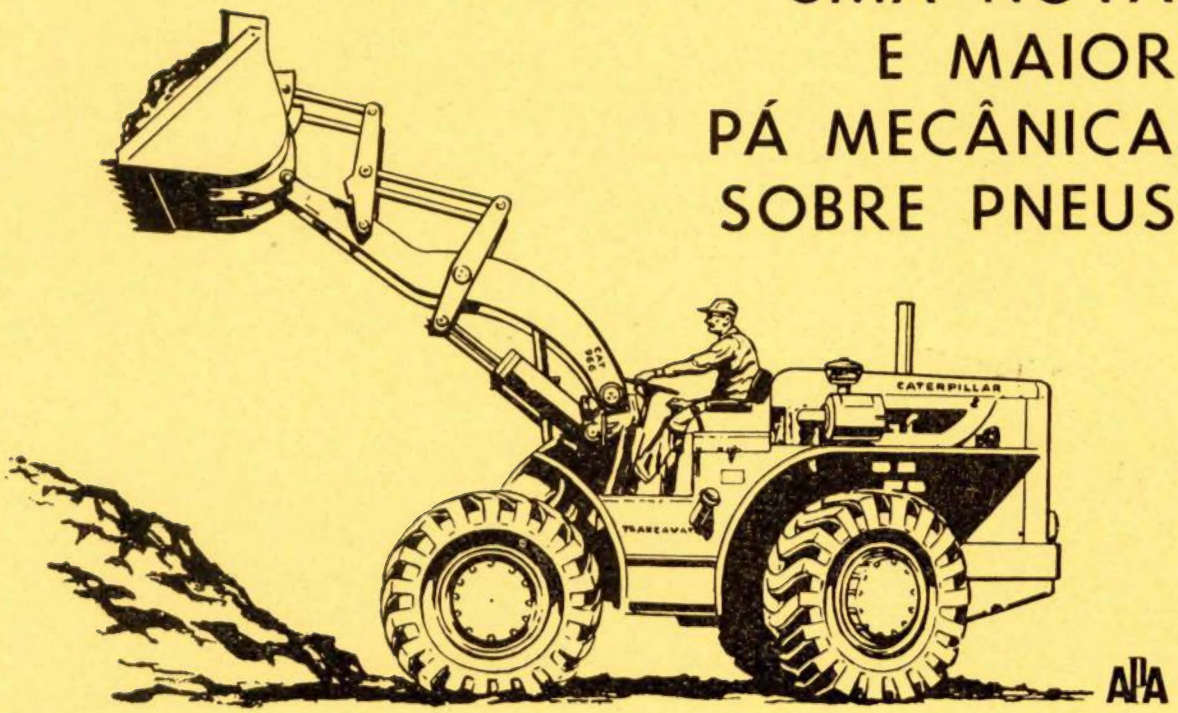
SOCIEDADE TECNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, LDA.

SEDE PROVISÓRIA: AV. DE MADRID, 3-B – LISBOA 1
TELEFS.: 72 40 53 (P P C /A), 71 06 20 – TELEGS.: STETRA

* «CATERPILLAR» E «TRAXCAVATOR» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR CO.

CATERPILLAR*

APRESENTA UMA NOVA E MAIOR PÁ MECÂNICA SOBRE PNEUS



TRAXCAVATOR*

2 3/4 JARDAS CÚBICAS

966

MANOBRA	fácil e rápida, com caixa de velocidades servo-comandada, sistema «power shift»
BALDE	com inclinação automática
POTENCIA	140 HP com motor CATERPILLAR Diesel turbo-alimentado
ESTABILIDADE	perfeita, mesmo com o balde carregado e com o alcance máximo de 1,50 m
SEGURANÇA	braços de comando do balde deixando sempre livre o acesso ao lugar do operador

STET

SOCIEDADE TECNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, LDA.

SEDE PROVISÓRIA: AV. DE MADRID, 3-B - LISBOA 1
TELEFS.: 724053 (P P C/A), 710620 - TELEGS.: STETRA

*«CATERPILLAR» E «TRAXCAVATOR» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR CO.

C. D. U. 621.181.6

CICLOS ESPECIAIS

PELO ENG.º JOÃO CARLOS ADRIÃO DE SEQUEIRA

5.ª lição proferida em Luanda e Lourenço Marques integrada no 1.º Curso de Férias da Universidade do Ultramar

Nas primeiras lições deste curso falei sobre as caldeiras do tipo clássico na sua evolução para a caldeira de radiação e na caldeira de circuito aberto. Vamos hoje tratar de outros tipos de caldeira, algumas com larga representação em execuções industriais como a caldeira La Mont e a caldeira Velox, outras constituindo ideias originais, possìvelmente germens de possível aplicação nos anos próximos ou constituindo sòmente principios arrojados que interessam ao engenheiro.

Caldeira La Mont

A caldeira La Mont é o tipo mais conhecido das caldeiras de circulação forçada, fig. 1.

Distingue-se dos outros tipos de caldeiras de circulação forçadas pela adopção de tuyeres nas

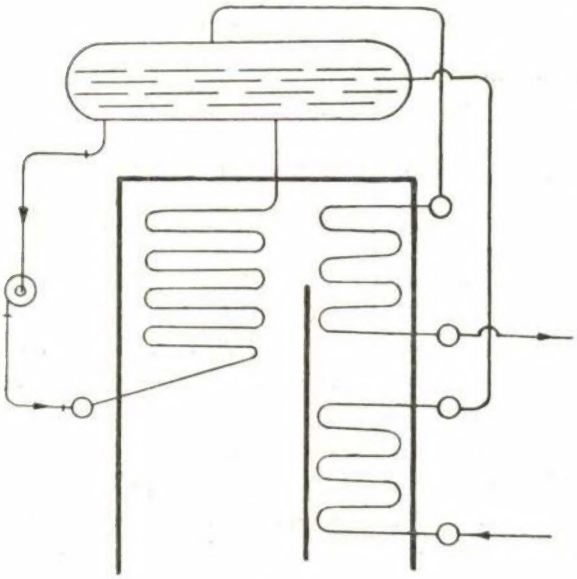


Fig. 1

entradas dos tubos que igualizam a alimentação mesmo com pequenos débitos.

As superfícies de aquecimento são constituídas por serpentinas ou écrans de água de tubos de 30 mm de diâmetro, que forram completamente as paredes e que estão montadas em paralelo partindo de vários colectores e desembocando em outros tantos colectores que por seu turno vão debitar a água no ebulidor da caldeira: além das serpentinas que forram completamente as paredes estão colocadas no percurso dos gases fascículos tubulares.

Estes fascículos recebem igualmente água de colectores ligados à bomba de circulação e debitam a sua produção em outros tantos colectores ligados ao corpo cilíndrico superior.

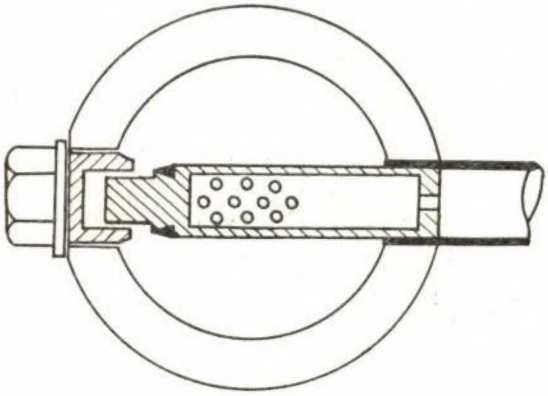


Fig. 2

A entrada de cada serpentina é protegida por uma crepine furada, fig. 2, com um grande número de furos mais pequenos do que o diâmetro desta.

Esta crepine tem por objectivo evitar que partículas sólidas que podiam evitar a entrada da água obstruam as entradas.

Corpo cilíndrico — O corpo cilíndrico e os colectores tanto de entrada como de saída são sempre colocados fora do contacto dos gases.

A espessura dos corpos cilíndricos é muito inferior aos das caldeiras vulgares porque em virtude do intercalado dos colectores de saída

existem muito menos furos do que nas caldeiras vulgares.

Bombas de circulação — As bombas de circulação têm que pôr em movimento grandes débitos de água igual muitas vezes ao peso do vapor correspondente à produção máxima mas a altura manométrica é sempre fraca, cerca de 2,5 k/cm².

A maioria das caldeiras La Mont são equipadas com 2 bombas, uma eléctrica e outra uma turbo Bomba a Vapor das quais uma é de reserva. Em geral um manómetro diferencial põe em serviço ou fóra da circulação uma destas bombas.

Vantagens da circulação forçada

A circulação forçada assegura um forte arrefecimento dos tubos e elimina radicalmente os riscos da fixação das bolhas de vapor donde resulta uma segurança absoluta de marcha.

A circulação forçada permite adoptar tubos de pequeno diâmetro em geral de 30 mm o que dá origem às seguintes vantagens:

a) — Os tubos de pequeno diâmetro ficam sujeitos a fadigas térmicas e mecânicas bastante inferiores às dos tubos das caldeiras vulgares de maior diâmetro, fig. 3.

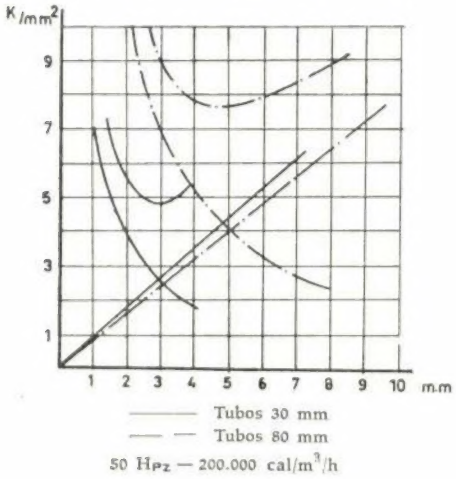


Fig. 3

b) — Diminuição de volume das caldeiras porque no mesmo espaço podem-se alojar maior número de tubos de pequeno diâmetro do que de grande.

c) — A superfície de convecção é menor porque o coeficiente de transmissão cresce com a diminuição do diâmetro do tubo.

d) — A grande velocidade da água impede a formação de depósito de calcáreo.

Está pelos motivos atrás indicados, a circulação forçada destinada num futuro próximo a ser a empregada em todos os tipos das caldeiras, como já o é nas caldeiras de circuitos abertos.

Caldeira Velox

A base da Caldeira Velox é a combustão sob pressão numa câmara da combustão metálica a uma pressão de 2 a 3 kg/cm² pressão a que são comprimidas o ar da combustão e o óleo da combustão.

A combustão sob pressão origina uma passagem dos produtos da combustão através do fascículo tubular com uma velocidade de

200 m/segundo

isto é, pouco mais ou menos *20 vezes* o seu valor nas caldeiras normais.

Esta combustão sob pressão origina o desembravimento de

7 a 8.000.000 cal/hora/m³

quando este valor nas caldeiras vulgares atinge normalmente

200.000 cal/h/m³

e raramente

600.000 cal/h/m³

Este aumento da velocidade da circulação faz aumentar o coeficiente da transmissão e portanto reduz a superfície dos aquecimentos necessários a cerca de 1/10 da superfície do aquecimento das caldeiras vulgares.

— A água a que foi retirado o ar dissolvido é tratada e enviada por uma bomba G para um separador C, fig. 4.

Uma outra bomba D envia esta água para os tubos evaporadores (1) que são aquecidos exteriormente pelos gases da combustão que passam em seguida no interior dos tubos conforme se vê na figura.

A água e o vapor que saem pela parte superior do separador C são ciclonadas separando-se a água do vapor.

Este vapor passa em seguida nos tubos do

sobreaquecedor B atravessado pelos produtos da combustão onde o vapor é sobre-aquecido: um regulador J permite manter estável a temperatura do sobreaquecimento.

O óleo combustível é comprimido por uma bomba 12 através dum filtro 13 e dum aquecedor 14 e é enviado ao queimador 5.

O ar exterior é comprimido pelo compressor 9 na câmara de combustão.

Os produtos da combustão saindo da câmara da combustão passam através de tubos evaporadores que forram a câmara da combustão entram no sobreaquecedor B no permutador J e vão finalmente entrar na turbina a gaz S que produz energia para o compressor, fig. 7.

Os gases da combustão atravessam em seguida o aquecedor da água, fig. 6, antes de se escaparem para a atmosfera.

O corpo cilíndrico é forrado por tubos, conforme se vê claramente na figura 5.

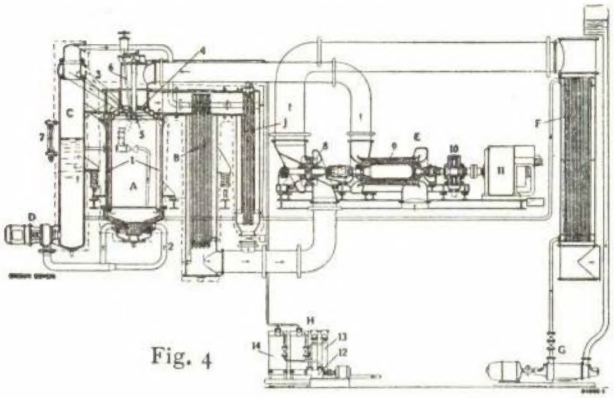


Fig. 4

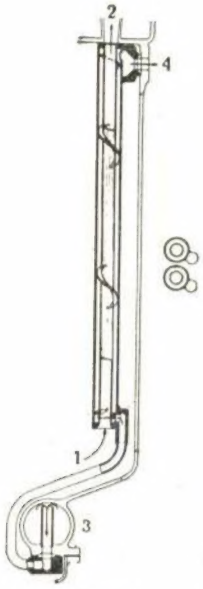


Fig. 5

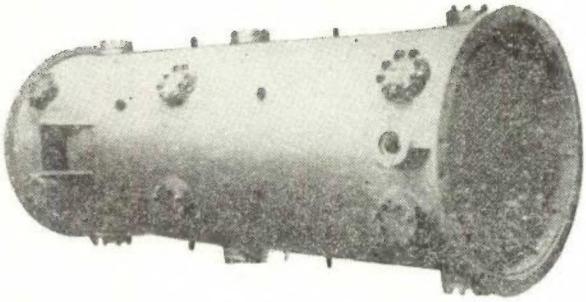


Fig. 6

Os gases à entada da turbina a gás tem ainda uma temperatura de **450°** a **550°** e chegam com a possibilidade de produzirem uma potência capaz de assegurar a compressão do ar.

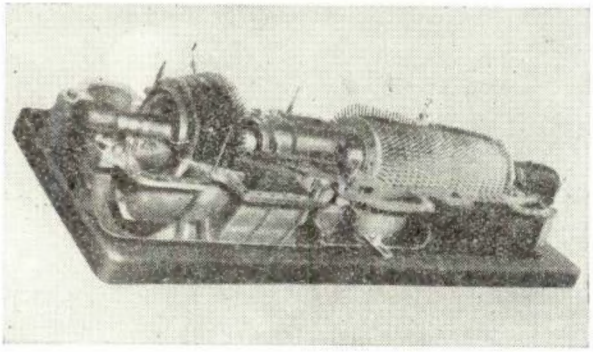


Fig. 7

O rendimento térmico da caldeira Velox é dado por:

$$\mu\ th = \frac{D\ (i_d - i_w)}{B\ H_u}\ 100$$

em que:

D — é a produção de vapor K/hora
B — a quantidade de combustível K/hora
H_u — Poder calorífico inferior
i_d — Calor contido no vapor sobreaquecido
i_w — Calor contido na água de alimentação

anda à roda de 90 %, fig. 8.

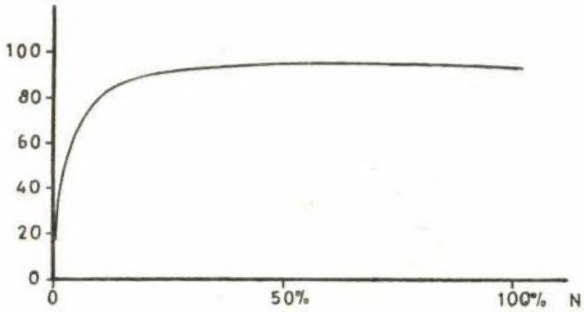


Fig. 8